# Villám malo

*Ne ragaszkodj a szent mártixhoz! A tantárgy témája jóval több, mint amit egy félévben át lehet adni, viszont a zh előforduló típusfeladatokat megoldani és azok hátterét megérteni nem nehéz (és a jövőben hasznát fogod venni ennek a tudásnak). Ezt igyekszik elősegíteni ez a doksi.*

2004 dec.

SzaMa szabomarcell kukac axelero.hu

Köszi Bergmann Gábornak a korrektúráért

## Boole algebra

Ezt tudják az infósok :) Azért néhány hasznos azonosság: (- a negálás)

a\*a=a

a+(-a)=1

a\*(-a)=0

(a+b)\*c=a\*c+b\*c

-(a+b)=(-a)\*(-b) (De Morgan)

Implikáció a=>b ha a igaz, b is igaz.

Ha a hamis, b tetszőleges.

Ha b hamis, a hamis.

a=>b = (-a)+ab

## Z2 kételemű ciklikus csoport

Elemei 0 és 1. Műveletek: szorzás, mod2 összeadás.

1+1=0

Kapcsolat a Boole algebrával

a igaz p=1; a hamis p=0;

b igaz q=1; b hamis q=0;

-a = 1 + p

a V b = p + q + p\*q

a ^ b = p\*q

a => b = (-a)Vab = (1+ p) + (pq) + ((1 + p)\*pq) = 1 + p + pq + pq + pq = 1 + p + p\*q

## XYZ állításai

X: közülünk kettő igazat mond; Y: Z hazudik; Z: igazat mondok

Itt szépen felírod a 0-7ig a számokat binárisan, és kihúzod azokat, amik ellentmondanak egy feltételnek.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | X feltétel ellenőrzése közben |
| 0 | 0 | 0 | Jó, mert „kettő igazat mond” nem teljesül, X=0 |
| 1 | 0 | 0 | Kihúzandó, mert „kettő igazat mond” nem teljesül, mégis X=1 |
| 0 | 1 | 1 | Kihúzandó, mert „kettő igazat mond” teljesül, mégis X=0 |

A három feltétel ellenőrzése után már csak azokat az eseteket nem húztuk ki, amik lehetségesek.

Megj: az „igazat mondok” nem hordoz információt, lehet igaz, és hamis is. (De a „Igazat mondok, és B hazudik” már más, mint a „B hazudik!”)

Megj: a „hazudok” paradoxon, ha a többi feltételből a hazug paradoxonhoz jutunk, akkor azok a feltételek rosszak.

## Propozicionális logika

Az atomokat x,y,z vagy φ, ψ betűkkel jelöljük, ezek logikai változók. Az atomok halmazát X-szel jelöljük. Az u modell minden atomhoz rendel egy (igaz/hamis) értéket.

Az atomokból logikai műveletekkel összerakott képletet formulának nevezzük (egy atom is lehet formula)

Egy elméletet nagy görög betűvel jelölünk (Σ, Γ, Δ), az elmélet formulák halmaza. Ezek a formulák az elméletben igaz állítások.

Természetesen nem minden modell összeegyeztethető minden elmélettel. u modell modellje a Σ elméletnek, ha az elmélet formuláiba behelyettesítve az u által megadott értékeléseket minden formula igaz lesz.

Pl: Σ={x=>y, y^z} esetén u1={x=1;y=1;z=1} modellje, u2={x=0;y=0;z=1} nem modellje Σ elméletnek.

Egy modell konzisztens, ha van modellje. /ha inkonzisztens, akkor ellentmondás van az alapformulákban; ezt felhasználva levezethető olyan állítás is, ami hamis/

Egy modell teljes, ha legfeljebb egy modellje van. (Propozicionális logikában) /teljes modell esetén minden állításról be tudjuk bizonyítani, hogy igaz vagy hamis; több modell esetén ez természetesen nem lehetséges; inkonzisztens elméletnél minden állítás igaz és hamis voltát **is** be tudjuk bizonyítani – ez teljes csak igazán ;) /

Így, ha a modellek száma

0: inkonzisztens, teljes

1: konzisztens, teljes (ezt szeretjük)

több: konzisztens, nem teljes

Prop logikában a „levezethető” (véges sok lépéssel) és az „igaz” egymásból következnek (magyarán a két dolog ugyanaz).

Jel: levezethető: Σ ├ φ (szintaktikai következménye)

igaz: Σ╞ φ (szemantikai következménye)

Egy formula igaz egy elméletben, ha az elmélet minden modelljén igaz.

Egy formula független egy elmélettől, ha az elméletnek van olyan modellje, amiben igaz, és van olyan is, melyben nem.

Inkonzisztens elméletből mindig levezethető a „hamis” (jele: dulpa szárú F), sőt, bármi levezethető.

## Tautológia, kielégíthetőség

Egy formula (állítás) tautológia, ha minden modellben igaz.

Pl: φ=>φ; φ V (-φ)

Egy formula kielégíthető, ha van olyan modell, ahol igaz.

Pl: φ=>ψ; φ

Egy tautológia mindig kielégíthető, egy tautológia tagadása nem kielégíthető.

Léteznek természetesen olyan állítások, melyek kielégíthetőek, és a tagadásuk is az.

Egy állítás tautológia voltát úgy szoktuk bizonyítani, hogy a tagadásáról belátjuk, hogy nem kielégíthető.

Pl: φ=>ψ csak akkor hamis, ha φ igaz, és ψ hamis. Feltesszük, hogy ψ hamis, ha ekkor arra jutunk, hogy φ is hamis, az állítás (φ=>ψ) tautológia.

Ha (ψ hamis) mellett φ lehet igaz, (φ=>ψ) nem tautológia, mert a tagadása kielégíthető.

Pl: (η => ( φ V ψ)) => ((η => φ) V (η => ψ))

Azt vizsgáljuk, hogy lehet-e ((η => φ) V (η => ψ))=0 esetén (η => ( φ V ψ))=1

((η => φ) V (η => ψ))=0 csak úgy jöhet ki, hogy (η => φ) = 0 és (η => ψ)=0 ebből η=1, ψ = φ = 0

Ezt behelyettesítve (η => ( φ V ψ)) = (1=>0) = 0. Tehát az eredeti állítás minden esetben igaz, azaz tautológia.

## Predikátum logika

A formulákban szerepelhet a „minden” és „létezik” jel.

A negálás kivihető a jel elé, de ekkor a „minden” jel „létezik” lesz, és fordítva.

„Minden nő nem csúnya (szép)” ekvivalens „Nem létezik csúnya nő”.

Az előző példa kapcsán felmerül: egy formula *kielégíthető*, ha van olyan modell, amin igaz (pl: szépségverseny). Egy formula *érvényes*, ha minden modellen igaz (hááát). ☺

Egy formula kielégíthető és érvényes voltának eldöntésekor érdemes 3-4 atomból álló világot magunk elé képzelni, és ezen példákat, ellenpéldákat keresni.

Az atomok között értelmezhetünk műveleteket. Atomokból műveletekkel termeket állítunk elő (egy atom is term).

A formulákban termek között szerepelhet az = jel, és relációk.

Egy reláció term párokhoz (vagy esetleg term-hármasokhoz, -négyesekhez, stb.) rendel igaz vagy hamis értéket.

Pl. (x<y) lehet igaz vagy hamis.

**A reláció viselkedését az elmélet határozza meg!**

Ismétlődő példa a < reláció. Az megszokott, egész számokon értelmezett < relációt a következő elmélet határozza meg:

(M: minden, L: létezik)

Σ={ Mx -(x<x)

MxMyMz( x<y ^ y<z => x<z ) //tranzitív

MxMy( x<y V x=y V y<x ) //teljes rendezés

-LxMy( -(x=y) => y<x ) //nem létezik legkisebb elem

-LxMy( -(x=y) => x<y ) //nem létezik legnagyobb elem

MxLy( y<x ^ (-Lz y<z<x)) //minden számhoz van közvetlen előtte lévő

MxLy( x<y ^ (-Lz x<z<y)) //minden számhoz van közvetlen utána lévő

//valós számoknál az utóbbi 2 nem igaz

}

Érdemes megnézni, hogy egy példában ezek ott vannak-e, mert különben átejthetjük magunkat, ha odaképzeljük. Pl. legkisebb elem != olyan elem, akinél nincs kisebb, mert ha nem teljes a rendezés, sok olyan elem lehet, akinél nincs kisebb, mégsem kisebb mindenki másnál.