III. gyakorlat 2010. XI. 10.

$\boxed{HF: 4, 10}$

Elágazó folyamatok (3. feladatsor)

(4) Az eloszlást a generátorfgv-en mondjuk meg. Van egy ősegyed, annak utódai, akiket egymástól függetlenül hozzák létre az utódokat, stb. Mi a valószínűsége, hogy kihal, stb.

Egy elágazó folyamatra a 2. generációra pl. a generátorfgv-t 2-szer kell egymásra alkalmazni (kompozíciót képezni).

(1.)

Legyen $g(z)$: az utódeloszlás generátorfgv-e.

$g(z) = ?$

$X$: utódok száma (egy életre)

$$g(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) \cdot z^k =$$

$$= 0{,}2 \cdot z^0 + 0{,}4 \cdot z^1 + 0{,}4 \cdot z^2$$

a) 5. generáció nagyságának generátorfüggvénye:

$$h(z) = g(g(g(g(g(z)))))$$

$E($~~~~5. generáció nagysága$) = h'(1)$

Így a sokszorosan összetett fgv-t deriválni kell:

$$g'(g(g(g(g(z))))) \cdot g'(g(g(g(z)))) \cdot \cancel{g'(g(g(z)))} \cdots$$

$$\cdot\, g'(g(g(z))) \cdot g'(g(z)) \cdot g'(z)$$

$$h'(1) = [g'(1)]^5$$

$$g(1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\, 1^k = 1 \quad \to \quad g'(g(g(g(g(z))))) = g'(1)$$

$g'(1)$ az egygenerációsnak a várható értéke.

$$g'(1) = EX = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 2 = 1{,}2$$

így $\quad h'(1) = \underline{\underline{1{,}2^5}}$

b) 2 év múlva már nem lesz üzlete

↓

a második generáció nagyságának generátorfv-e

$$g(g(z))$$

Mi a valószínűsége, hogy a 2. generáció üres?

Ha $Y$ egy valváltozó, generátorfv-e $k(z) = E(z^Y)$, akkor mi a valószínűsége, hogy $P(Y=0)$

Mivel $\quad k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k) \cdot z^k \quad \to$ vegyük a $z=0$-t.

Így $P(Y=0) = g(0)$ generátorfgv-e a $\emptyset$ helyen.

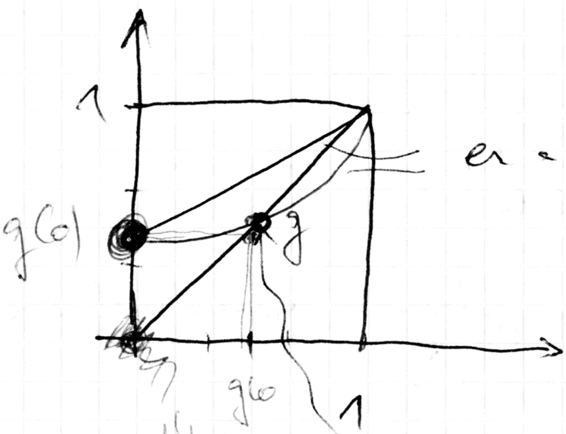
Így $P($legfeljebb 2 év után becsődöl$) = g(g(0))$

$$g(g(z)) = 0{,}2 + 0{,}4\cdot(0{,}2+0{,}4z+0{,}4z^2) +$$
$$+\, 0{,}4\,(0{,}2+0{,}4z+0{,}4z^2)^2$$

$z=0$-t beírva:

$$= 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}2^2$$

c, Mekkora a valószínűsége, hogy sohasem csődöl be.




ez a kettő lehet

↓ az dönti el, hogy mekkora 1-hez a deriváltja.

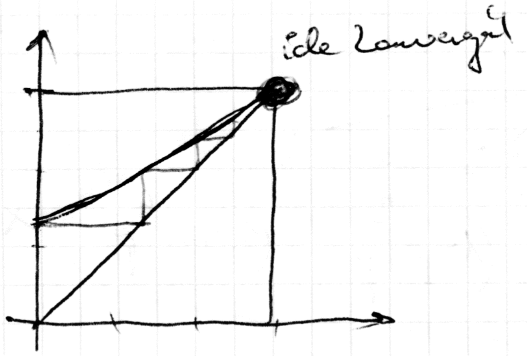
~~Ha a derivált~~

vetítjük x tengelyre, majd a g-hez nézünk vissza ilyen

a piros fgv értéke a metszéspontokhoz konvergál tehát ← ilyenkor a várható érték > 1

Ez egy fixpont!

Ha $E<1$, akkor ez 1-hez konvergálna;




1-hez konvergál

↓ 1 valószínűséggel ki fog halni.

Most tudjuk, hogy $E > 1$, mert $E = 1{,}2$

így $P$(nem csődöl be) $= 1 - P$(becsődöl)

így a ~~[illegible]~~ fixpont-egyenletet kell megoldani

$g(z) = z$

$$0{,}2 + 0{,}4z + 0{,}4z^2 = z$$

$$0{,}4z^2 - 0{,}6z + 0{,}2 = 0$$

$$\cancel{0{,}4z} \quad 2z^2 - 3z + 1 = 0$$

$$(2z-1)(z-1) = 0$$

$z = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $z = 1$

a kihalás valószínűsége

$P$(kihalás)

nyilván ez 1-es megoldás ebben az esetben és, ez ki is jött

így $P$(örökké megy) $= 1 - P$(kihalás) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(2.) 1 vírusos gép

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $(1-p)p$ | $(1-p)^2 p$ | $(1-p)^3 p$ | $(1-p)^4 p$ | |

X: utódok száma

geometriai eloszlás

$(1-p)^k p$ a feladatszövegben nem jól van.

generátorfgv-e:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k p \cdot z^k =$$

$$p \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left((1-p)z\right)^k}_{\text{mértani sor}}$$

$$= \frac{p}{1-(1-p)z}$$

$$E(\text{30-adik generáció}) = (EX)^{30} = 3^{30}$$

b, 3 nap múlva már nincs több fertőzött gép

↳ kihal.

3 generáció utáni kihalás valószínűsége.

$$g(g(g(0))) = \left. \frac{p}{1-(1-p)\frac{p}{1-(1-p)\frac{p}{1-(1-p)z}}} \right|_{z=0}$$

és $p = \frac{1}{4}$

c) Sosem sikerül kiirtani:

$$P(\text{sosem sikerül kiirtani}) = 1 - \underbrace{P(\text{kihalás})}_{\uparrow}$$

$g(z) = z$ megoldása.

$$g(z) = \frac{p}{1-(1-p)z} = z$$

$$p = z\left(1-(1-p)z\right)$$

$$p = z - (1-p)z^2$$

$$(1-p)z^2 - z + p = 0$$

$$z_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1-p)p}}{2(1-p)} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1-4p+4p^2}}{2(1-p)} = \frac{1 \pm \sqrt{(1-2p)^2}}{2(1-p)} =$$

$$= \frac{1 \pm (1-2p)}{2(1-p)} \to \frac{1+1-2p}{2(1-p)} = \frac{2-2p}{2-2p} = 1$$

$$\frac{1-1+2p}{2(1-p)} = \frac{p}{1-p}$$

Ha $p \leq \frac{1}{2}$ és $p \geq \frac{1}{2}$ a két eset

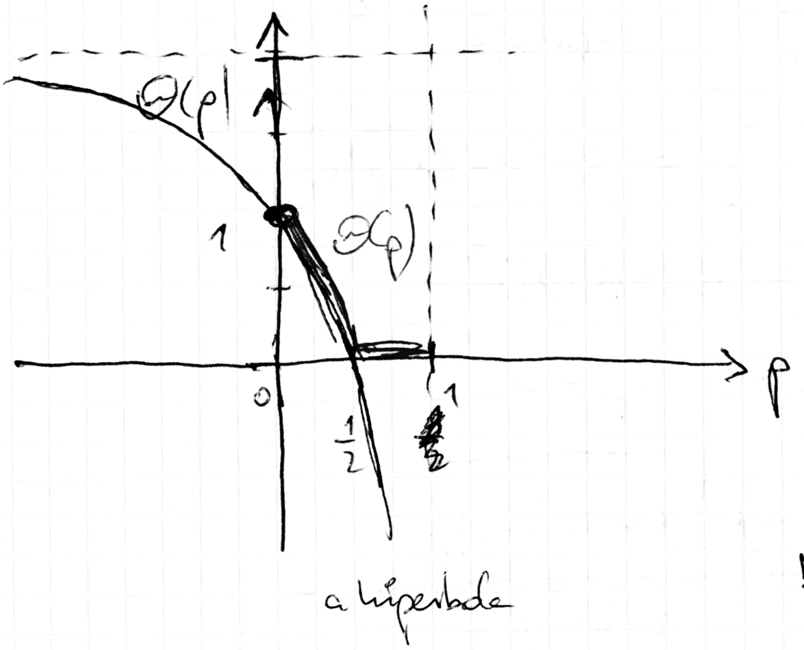
$P(\text{kihalás}) = \frac{p}{1-p}$ ill. $1$ (mert nem lehet 1-nél nagyobb).

így $P(\text{túlélés}) = 1 - \frac{p}{1-p}$ ill. $\emptyset$.

(5.) Pont azt kérdezi, mint a 2. feladatnál megoldottunk.

$$\Theta(p) = \begin{cases} 1 - \frac{p}{1-p}, \text{ ha } & p \le \frac{1}{2} \\ 0, \text{ ha } & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ezt ábrázolva:




$$\frac{1-2p}{1-p} = \frac{(1-p)\cdot 2 - 1}{1-p} =$$

$$= 2 - \frac{1}{1-p}$$

ez pedig egy hiperbola

(3.)

$p_0 = 0{,}2$ senki nem jön

$p_1 = 0{,}2$ 1 ember jön

$p_2 = 0{,}6$ 2 ember jön

Valaha lesz kövületet → kihalás.

$$g(z) = 0{,}2 + 0{,}2z + 0{,}6z^2$$

$$g(z) = z$$ a kérdés

~~Ha lefixáljuk~~

A második kérdés:

lefixáljuk $p_1$-et, de a másik két változó paraméter

$\downarrow$

$p_0$ paraméter.

Ekkor $p_2 = 1 - p_0 - p_1 = 0,8 - p_0$

Az új generátorfgv:

$$g(z) = p_0 + 0,2z + (0,8 - p_0)z^2$$

itt is a $g(z) = z$ egyenletet kell megoldani.

A $p_0$ fgv-ében lehet megoldani

ha 1 felett van a $p$-től, akkor kisebb.

---

## Hoeffding-egyenlőtlenség, CHT

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ fgtlen. valószínűségi változók.

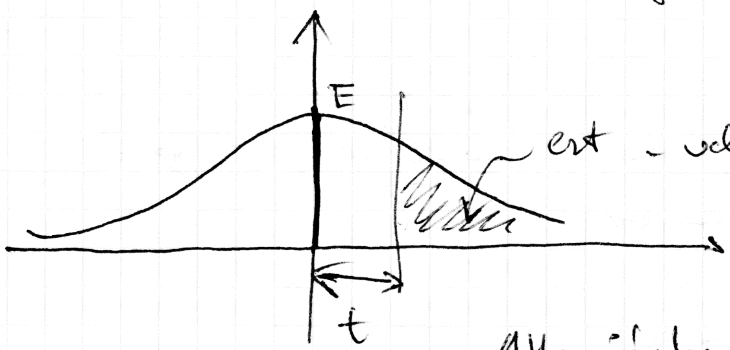
$a_i \leq X_i \leq b_i$ 1 valószínűséggel

és $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

Hoeffding

Ekkor $P(S_n - E(S_n) \geq t) \leq \exp\left[-\dfrac{2t^2}{\sum_i (b_i - a_i)^2}\right]$

Hoeffding: nem kell azonos eloszlás




ezt a valószínűséget akarjuk becsülni

Akkor jó, ha $t$ nagy

Bármilyen $t > 0$-ra igaz.

7\. 400 db A erőmű

200 db B típusú erőmű

| | ött | $a_i$-k alsó | $b_i$-k felső |
|---|---|---|---|
| A | 1 MW | 0,7 | 1,6 |
| B | 2 MW | 1,2 | 2,8 |

Minden erőművet egy valószínűségi változó felel meg → milyen kapacitáson üzemel, s ezek összege adja meg az összkapacitást.

$X_1, X_2, \ldots, X_{400}$: az A típusú erőművek ~~kapac~~ termelése

$X_{401}, \ldots, X_{600}$: a B típusú erőművek termelése

$$S_{600} = \sum_{i=1}^{600} X_i$$

a) Egy $t$ korlátot kell mondani úgy, hogy

$$P(S_n - ES_n \geq t) \leq 10^{-8}$$

$E(S_{600}) = 400 \cdot 1 + 200 \cdot 2 = 800$

Mivel van felső becslésünk, ezért olyat keresünk,

amire még $\exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{600}(b_i-a_i)^2}\right) \le 10^{-8}$ és teljesül

A legjobb $t$-t akarjuk, így egyen-
lőségre oldjuk meg:

$$\exp\left(-\frac{2t^2}{400 \cdot 1{,}1^2 + 200 \cdot 1{,}6^2}\right) = 10^{-8}$$

$$-\frac{2t^2}{400 \cdot 1{,}1^2 + 200 \cdot 1{,}6^2} = \ln 10^{-8}$$

$$t = \sqrt{(4 \cdot \ln 10) \cdot (400 \cdot 1{,}1^2 + 200 \cdot 1{,}6^2)}$$

$= 95{,}77$

b) $C = 800$ MW névleges

Mekkora valószínűséggel lépi túl $C$-t az aktuális igénybe-
vétel?

A típusra CHT igaz → normálissal közelíthető → 400 MW

B típusra is alkalmazható CHT → 400 MW

mindkettő normális eloszlású →

→ $E = 800$ MW, így pont a 800 MW körül lesz a szimmetria → $\frac{1}{2}$ lesz a valség.

c) Csak felső becslést fogunk tudni adni a Hoeffding-segítségével.

360 db A típ.
200 db B típ

$S_{560} =$

$ES_{560} = 760\,MW$

$\cancel{P(S_{560} - ES_{560}}$

Kérdés: $P(S_{560} \geq 800) = ?$

$$\|$$

$$P(S_{560} - ES_{560} \geq 800 - ES_{560}) =$$

$$= P(S_{560} - 760 \geq 40) \leq$$

$t$

$$\leq \exp\left[-\frac{2 \cdot 40^2}{360 \cdot 1{,}1^2 + 200 \cdot 1{,}6^2}\right] = 0{,}034$$

d) n db A típusú
200 db B típusú

$\cancel{P(S_{200+n} - E(S_{200+n}) \geq}$ $\quad E(S_{200+n}) = 400 + n$

Kell: $P(S_{200+n} \geq 800)$

$\downarrow$

$$P(S_{200+n} - E(S_{200+n}) \geq 800 - E(S_{200+n}))$$

$$P\left(S_{200+n}-(400+n) \geq 400-n\right) \leq \exp\left(-\frac{2\cdot(400-n)^2}{n\cdot 1{,}7^2+200\cdot 1{,}6^2}\right)=$$

$$=10^{-8}$$

ezt kell megoldani

(8.) 40000 család

$X_1, X_2, \ldots, X_{40000}$ fgtlen. egyenletes eloszlású

$$EX_1 = 20$$

$$DX_1 = 20$$

$$0 \leq X \leq 50$$

CHT-vel

$$S=\sum_{k=1}^{40000} X_k$$

Kérdés: $P(S \geq K) = 0{,}01$ milyen $K$-ra

↑ normális eloszlással közelíthető, előbb standardizálhatjuk.

$$ES = 20\cdot 40000 = 800\,000$$

$$DS = \sqrt{40000\cdot D^2X_1} = 200\cdot 10 = 2000$$

ahol a nagyságrendet nézzük képen

megfordítva az egyenlőtlenséget

vagyis $P\left(\frac{S-ES}{DS} \leq \frac{K-ES}{DS}\right) = 1-0{,}01$

ez már Standard normális eloszlás

$\downarrow$

$$\frac{K-ES}{DS} \approx \Phi^{-1}(0{,}99) = 2{,}33$$

$$\frac{K-800000}{2000} = 2{,}33$$

$\downarrow$

$$K = 800\,000 + 4660$$

Hoeffdinggel ugyanez:

$$P(S-ES \geq t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{40000\cdot(50-0)^2}\right) =$$

$$= 0{,}01$$

$$-\frac{2t^2}{40000\cdot 50^2} = \ln 0{,}01$$

$$t^2 = 40000\cdot 50^2\cdot \ln 10$$

$$t = 15174{,}27$$

így $P(S \geq ES + t)$

Amikor nem olyan nagyon távoli valószínűséget akarunk, akkor a CHT pontosabb.
Nagyon kis valószínűségre a Hoeffding jobb.