ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI β variáns

2008. ápr. 16.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Határozza meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\; 2^{2n+1}}\,(x-2)^n$$

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\; 2\cdot 4^n}$; $x_0 = 2$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{\sqrt{n}}}_{\to 1}\;\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1}\cdot 4} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{R} \Rightarrow R = 4$

(2) (4) (1)

A végpontok: (1)

$-2 \qquad 2 \qquad 6$

$x = -2$:

$\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 2\, 4^n}(-4)^n = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{1}{n^{1/2}}$ div. $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$ (2)

$x = 6$:

$\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\, 2\cdot 4^n}\, 4^n = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konv. (Leibniz sor) (2)

Konv. tartomány: $(-2, 6]$

2. feladat (17 pont)

a) Határozza meg az $f(x) = \dfrac{1}{1+5x}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

b) Határozza meg az $f(x) = \dfrac{1}{1+5x}$ függvény $x_0 = 2$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát! Majd erre támaszkodva a $g(x) = \dfrac{1}{(1+5x)^2}$ függvény $x_0 = 2$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

a.) $f(x) = \dfrac{1}{1-(-5x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-5x)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-5)^n x^n$ (3)

K.T.: $|-5x| = 5|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{5} = R_1$ (2)

an2z20080416/1 β

b.) $f(x) = \dfrac{1}{1+5x} = \dfrac{1}{11+5(x-2)} = \dfrac{1}{11}\,\dfrac{1}{1-\frac{-5}{11}(x-2)} =$ (2)

$= \dfrac{1}{11}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{11}(x-2)\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{11}\left(-\frac{5}{11}\right)^n (x-2)^n$ (2)

K.T.: $\left|-\frac{5}{11}(x-2)\right| = \frac{5}{11}|x-2| < 1 \Rightarrow |x-2| < \frac{11}{5} = R_2$ (2)

c.) $f'(x) = -1\cdot(1+5x)^{-2}\cdot 5 = \dfrac{-5}{(1+5x)^2} = -5\cdot g(x)$

$g(x) = -\frac{1}{5} f'(x) = -\frac{1}{5}\frac{d}{dx}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{11}\left(\frac{-5}{11}\right)^n (x-2)^n =$ (2)

$= -\frac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{11}\left(-\frac{5}{11}\right)^n n(x-2)^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{55}\left(-\frac{5}{11}\right)^n (x-2)^{n-1}$ (2)

$R_3 = R_2$ (nem változik) (2)

3. feladat (13 pont)

$$f(x) = \sqrt[4]{1+2x^3}$$

a) Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, annak konvergenciasugarát! Írja fel az első három nem nulla tagot elemi műveletekkel!

b) $f^{(11)}(0) = ?$ $f^{(12)}(0) = ?$

$f(x) = (1+2x^3)^{1/4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{1/4}{n}(2x^3)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{1/4}{n}2^n x^{3n} =$ (3) (1)

$= 1 + \binom{1/4}{1}2x^3 + \binom{1/4}{2}2^2x^6 + \binom{1/4}{3}2^3x^9 + \dots =$

$= 1 + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot x^3 + \dfrac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)}{1\cdot 2}\,4\cdot x^6 + \dots$ (2)

$|2x^3| = 2|x|^3 < 1 \Rightarrow |x| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = R$ (2)

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$; $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \Rightarrow f^{(k)}(0) = k!\, a_k$ (2)

$f^{(11)}(0) = 11!\, a_{11} = 0$ (1) $(a_{11} = 0)$

$f^{(12)}(0) = 12!\, a_{12} = 12!\binom{1/4}{4}2^4$ (2)

an2z20080416/2 β

4. feladat (12 pont)

a) Írja fel az $f(x) = \cos x$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak kovergencia-sugarát! (Indoklás nélkül!) Írja fel a sort szummás alakban is!

b) Közelítse $\cos 0,1$ értékét Taylor sorának első három nem nulla tagjával és becsülje meg az így elkövetett hibát!

c)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{\pi^{2k}}{4^{2k}} = ?$$

a.) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ (3) $R = \infty$ (1)

b.) $\cos 0{,}1 \approx 1 - \frac{0{,}1^2}{2!} + \frac{0{,}1^4}{4!}$ (2)

$|H| \le \frac{0{,}1^6}{6!}$ (2), mert Leibniz sor (1)

c.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (3)

5. feladat (17 pont)

$$f(x,y) = x^2\, y\, \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

a) Vizsgálja meg a függvény origóbeli határértékét az $x = \rho_n \cos\varphi_n$, $y = \rho_n \sin\varphi_n$ pontsorozat mentén! Létezik-e a határértéke f-nek az origóban?

b) A definíció alapján döntse el, hogy létezik-e az f függvény $P(0,1)$ pontbeli, x szerinti parciális deriváltja.

a.) $\lim\limits_{\substack{\rho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} f(\rho_n\cos\varphi_n, \rho_n\sin\varphi_n) = \lim\limits_{\substack{\rho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \rho_n^2 \cos^2\varphi_n\, \rho_n \sin\varphi_n \cos\frac{1}{\rho_n^2} =$ (2) (2)

$= \lim\limits_{\substack{\rho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underbrace{\rho_n^3}_{\to 0} \underbrace{\cos^2\varphi_n \sin\varphi_n \cos\frac{1}{\rho_n^2}}_{\text{korlátos}} = 0$ (3)

Mivel tetszőleges pontsorozatra az előző határérték $0 \xRightarrow{\text{átviteli elv}} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ (2)

an2z2080416/3. B

5/ b.) $f'_x(0,1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h,1) - f(0,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2 \cos\frac{1}{h^2+1} - 0}{h} =$ (3) (2)

$= \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{h}_{\to 0} \underbrace{\cos\frac{1}{h^2+1}}_{\to \cos 1} = 0$ (3) (vagy elég, hogy korlátos)

6. feladat (20 pont)

$$f(x,y) = \sin(x^4 y^2 + \pi x + 5y) \qquad P = P(1,0)$$

a) Indokolja meg, hogy létezik a P-hez tartozó gradiens és számolja ki! (grad $f(P)$ = ?)

b) Határozza meg a $\mathrm{d}f\big((1,0),(h,k)\big)$ kifejezést!

c) Számolja ki az f függvénynek a $P(1,0)$ pontbeli, $\underline{v} = (-3,-5)$ irányú iránymenti deriváltját!

d) Melyik egységvektor irányában a legnagyobb az f függvény $P(1,0)$ pontbeli iránymenti deriváltja?

a.) $f'_x = \cos(x^4y^2 + \pi x + 5y)\,(4x^3y^2 + \pi)$ (2)

$f'_y = \cos(x^4y^2 + \pi x + 5y)\,(2x^4y + 5)$ (2)

f'_x, f'_y K_P-ben $\exists$ és folytonos $\Rightarrow$ grad $f(P)$ $\exists$ (2)

(Sőt mindenütt $\exists$ grad $f(P)$)

grad $f(P) = f'_x(1,0)\,\underline{i} + f'_y(1,0)\,\underline{j} = -\pi\,\underline{i} - 5\,\underline{j}$ (3)

b.) $\mathrm{d}f\big((1,0),(h,k)\big) = f'_x(1,0)\,h + f'_y(1,0)\,k = -\pi \cdot h - 5k$ (2) (1)

c.) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = \text{grad} f(P) \cdot \underline{e}$ (2)

$\underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = -\frac{3}{\sqrt{34}}\underline{i} - \frac{5}{\sqrt{34}}\underline{j}$

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = (-\pi\underline{i} - 5\underline{j})\left(-\frac{3}{\sqrt{34}}\underline{i} - \frac{5}{\sqrt{34}}\underline{j}\right) = \frac{3\pi}{\sqrt{34}} + \frac{25}{\sqrt{34}}$

d.) A P pontbeli maximális iránymenti derivált iránya: $\underline{e} = \frac{\text{grad} f(P)}{|\text{grad} f(P)|} = \frac{-\pi\underline{i} - 5\underline{j}}{\sqrt{\pi^2+25}} = \left(\frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+25}}, \frac{-5}{\sqrt{\pi^2+25}}\right)$

an2z2080416/4 B

7. feladat (9 pont)

Legyen g kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény! Írjuk a g változója helyére az $2x + 3y^2$ kifejezést !
Legyen az így kapott kétváltozós függvény $u(x,y) = g(2x+3y^2)$!

$$u'_x = ? \qquad u'_y = ?$$

$$u''_{yy} = ? \qquad u''_{yx} = ? \qquad u''_{xy} = ?$$

$$u'_x = g'(2x+3y^2)\cdot 2 \qquad 1$$

$$u'_y = g'(2x+3y^2)\cdot 6y \qquad 2$$

$$u''_{yy} = \left(g''(2x+3y^2)\cdot 6y\right)6y + g'(2x+3y^2)\cdot 6 \qquad 3$$

$$u''_{yx} = \left(g'(2x+3y^2)\cdot 2\right)\cdot 6y \qquad 2$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} \qquad 1$$

CSAK A 40% ELÉRÉSÉHEZ JAVÍTJUK KI!

8. feladat (8 pont)

Írja fel az

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = \operatorname{sh} x, \quad f_4(x) = \operatorname{sh} x^3$$

$x_0 = 0$ körüli Taylor sorait, azok konvergenciasugarait!

$$f_1(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad R = \infty \qquad 2$$

$$f_2(x) = e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad R = \infty \qquad 1$$

$$f_3(x) = \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \qquad R = \infty \qquad 2$$

$$f_4(x) = \operatorname{sh} x^3 = x^3 + \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + \dots \qquad R = \infty \qquad 3$$

an2 z2080416/5 β

9. feladat (12 pont)

Legyen

$$f(x,y) = 3xy^2 + 4x^4y - 2x + 15 \qquad P = P(0,1)$$

a) Indokolja meg, hogy f totálisan differenciálható P-ben!
b) $\operatorname{grad} f(P) = ?$
c) Írja fel a P-hez tartozó érintősík egyenletét!

a.) $f'_x = 3y^2 + 16x^3y - 2$
$f'_y = 6xy + 4x^4$ 3

f'_x, f'_y ∃ és folytonos K_P-ben
⟹ f totálisan deriválható P-ben 2

b.) $f'_x(0,1) = 1$
$\boxed{3}$ $f'_y(0,1) = 0$ $\qquad \operatorname{grad} f(P) = \underline{i}$

c.) $f'_x(0,1)(x-0) + f'_y(0,1)(y-1) - (z - f(0,1)) = 0$
$\boxed{4}$ Az érintősík: $x - (z-15) = 0$

an2 z2080416/6 β