ANALÍZIS 2. **VIZSGADOLGOZAT** **2013. június 20.**

Mérnök informatikus szak α variáns Munkaidő: 90 perc

1. feladat (8+11 pont)

a) Definiálja az (a, b) intervallumon akárhányszor differenciálható f függvény $x_0 \in (a, b)$ bázispontú n-edrendű T_n Taylor-polinomját, a Lagrange-féle maradéktagot, valamint T Taylor-sorát. Adjon elégséges feltételt arra, hogy $f(x) = T(x)$ minden $x \in (a, b)$ esetén teljesüljön.

b) Írja fel az $f(x) = xe^x$ függvény $x_0 = -1$ körüli másodrendű Taylor-polinomját, a Lagrange-féle maradéktagot valamint Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát.

---

a) Taylor-polinom:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ekkor létezik olyan $\xi \in (x_0, x)$ (vagy esetleg $\xi \in (x, x_0)$), amelyre

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{k!}(x - x_0)^{n+1}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Taylor sor:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ha létezik $K > 0$, melyre $|f^{(n)}(x)| < K$, minden $n = 0, 1, \ldots$ és minden $x \in (a, b)$ esetén, akkor $f(x) = T(x)$ minden $x \in (a, b)$ esetén. **(2 pont)**

b) $f'(x) = (x + 1)e^x$, $f''(x) = (x + 2)e^x$, $f'''(x) = (x + 3)e^x$, (sőt $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$ tehát

$$T_2(x) = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2e}(x + 1)^2, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

és van olyan $\xi \in (-1, x)$, melyre

$$f(x) - T_2(x) = \frac{(\xi + 3)e^{\xi}}{3!}(x + 1)^3. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Innen

$$T(x) = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}(x+1)^n, \qquad \textbf{(4 pont)}$$

és a konvergenciasugár

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)}{n!}}{\frac{(n)}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n+1)}{n} = \infty,$$

tehát $KT = \mathbb{R}$. (**2 pont**) (Úgy is lehet, hogy

$$\begin{aligned} xe^x &= \frac{(x+1)}{e}e^{x+1} - \frac{e^{x+1}}{e} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{n+1}-(x+1)^n}{n!} = \\ &= \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}(x+1)^n, \end{aligned}$$

és a konvergenciatartomány megegyezik az e^x konvergenciatartományá-val, ami $\mathbb{R}$. (**6 pont**)

2. feladat (14 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e az f függvény az origóban?

b) Határozza meg f parciális deriváltjait az origón és azon kívül!

---

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos\varphi\sin r^2}{r^2} = \cos\varphi\lim_{r\to 0}\left(r\cdot\frac{\sin r^2}{r^2}\right) = 0,$$

tehát a függvény folytonos (**5 pont**).

b) Ha $(x,y)=(0,0)$, akkor

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\sin x^2}{x^2}-0}{x} = 1, \qquad f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{0\sin y^2}{y^2}-0}{y} = 0.$$

(2+2 pont)

Ha $(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_x(x,y) = \frac{(\sin(x^2+y^2) + 2x^2\cos(x^2+y^2))(x^2+y^2) - 2x^2\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

(3 pont)

$$f'_y(x,y) = \frac{(2xy\cos(x^2+y^2))(x^2+y^2) - 2xy\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \textbf{(2 pont)}$$

---

3. feladat (4+10 pont)

a) Az $y' = f(ax+by)$ differenciálegyenletben térjen át az $y(x)$ változóról az $u(x) = ax+by$ új változóra! $(b \neq 0)$ Milyen típusú differenciálegyenletet kapunk az u függvényre?

b) Oldja meg az

$$y' = \frac{1}{\cos^2(y-x)}$$

differenciálegyenletet. (Elég az implicit alak.)

---

a)

$$y' = \left(\frac{u-ax}{b}\right)' = \frac{u'-a}{b},$$

tehát a

$$u' = a + bf(u)$$

szeparábilis differenciálegyenlethez jutunk. (**4 pont**)

b) Alkalmazva az $u = y - x$ behelyettesítést, az

$$u' = -1 + \frac{1}{\cos^2 u} = \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} \quad \textbf{(3 pont)}$$

differenciálegyenletet kapjuk. Ennek megoldásai az $u = y - x = k\pi$,(**2 pont**) illetve

$$-u - \operatorname{ctg} u = \int -1 + \frac{1}{\sin^2 u} du = \int -\frac{-\cos^2 u}{\sin^2 u} du = \int 1 dx = x + c,$$

(4 pont)

vagyis

$$-y + x - \operatorname{ctg}(y - x) = x + c. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

---

4. feladat (13 pont)

$$y^{(6)} - y'' = \operatorname{sh} x + x \cos x + x^2 + e^{3x}$$

a) Határozza meg a *homogén* egyenlet általános megoldását!

b) Milyen alakban keressük az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását? (Nem kell megoldani a differenciálegyenletet.)

A $0 = \lambda^6 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)$ karakterisztikus egyenlet gyökei $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1, \lambda_{5,6} = \pm i$, tehát

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 \cos x + c_6 \sin x. \qquad \textbf{(6 pont)}$$

A partikuláris megoldást olyan alakban keresnénk, mint a próbafüggvényt:

$$Ae^x + Be^{-x} + (Cx + D)\cos x + (Ex + F)\sin x + (Gx^2 + Hx + I) + Je^{3x}, \quad \textbf{(3 pont)}$$

de az egyes tagokban jelentkező külső rezonancia miatt

$$y_{ip} = Axe^x + Bxe^{-x} + x(Cx + D)\cos x + x(Ex + F)\sin x + x^2(Gx^2 + Hx + I) + Je^{3x}.$$

(4 pont)

---

5. feladat (8 pont)*

Mennyi az

$$\int_{|z+2|+|z-2|=5} \frac{\cos z}{z^4 + 8z^2 + 16} dz$$

integrál értéke?

$z^4 + 8z^2 + 16 = (z^2 + 4)^2 = (z + 2i)^2(z - 2i)^2$, tehát a szingularitások: $\pm 2i$. (**3 pont**) Itt $|2i + 2| + |2i - 2| = |-2i + 2| + |-2i - 2| = \sqrt{8} + \sqrt{8} = \sqrt{32} > 5$, tehát mindkét szingularitás a görbén kívül van (**3 pont**), így a Cauchy-tétel alapján

$$\int_{|z+2|+|z-2|=5} \frac{\cos z}{z^4+8z^2+16} dz = 0 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

---

6. feladat (8+8=16 pont)*

Számolja ki az alábbi integrálokat:

$$a) \int_{\substack{x^2+y\le 1\\ y\ge 0}} y^2 dT \qquad b) \int_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0}} y dT.$$

---

a) A tartományon $0 \le y \le 1-x^2$, $-1 \le x \le 1$, (**3 pont**)

$$\int_T y^2 dT = \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} y^2 dy dx \overset{\textbf{2 pont}}{=} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^3}{3} dx \overset{\textbf{1 pont}}{=}$$
$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} 1-3x^2+3x^4-x^6 \overset{\textbf{2 pont}}{=} \frac{1}{3}\left(2-2+\frac{6}{5}-\frac{2}{7}\right)$$

b) Polárkoordinátákkal

$$\int_T y dT \overset{\textbf{4 pont}}{=} \int_0^1\int_0^\pi r^2 \sin\varphi d\varphi dr \overset{\textbf{3 pont}}{=} \frac{1}{3}\left[-\cos\varphi\right]_0^\pi \overset{\textbf{1 pont}}{=} \frac{2}{3}.$$

---

7. feladat (8+8=16 pont)*

a) Adjon szükséges és elégséges feltételt az $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ komplex függvény $z_0 = x_0+iy_0$ pontban való differenciálhatóságára! Írja föl az $f'(z_0)$ deriváltat csak a $v(x,y)$ függvény segítségével!

b) Hol differenciálható és hol reguláris az

$$f(z) = \sin \overline{z}$$

függvény?

a) Ha f differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban, akkor

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) \qquad \text{és} \qquad u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0) \quad \textbf{(3 pont)}$$

Ha afenti egyenletek teljesülnek, továbbá u és v totálisan differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor f diferenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban (**2 pont**). Ekkor $f'(z_0) = v'_y(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0)$ (**3 pont**).

b) $\sin \overline{z} = \sin(x - iy) = \sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y$ (**2 pont**), vagyis

$$u'_x = \cos x \operatorname{ch} y = -\cos x \operatorname{ch} y = v'_y \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \textbf{(2 pont)}$$

$$u'_y = \sin x \operatorname{sh} y = -\sin x \operatorname{sh} y = v'_y \Rightarrow \operatorname{sh} y = 0 \Rightarrow y = 0, \quad \textbf{(2 pont)}$$

és a parciális deriváltak mindenütt folytonosak, így u és v mindenhol totálisan diferenciálható, vagyis a függvény az $\frac{\pi}{2} + k\pi$, pontokban differenciálható és sehol sem reguláris (**2 pont**).

A $*$-os feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.):

8. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$f(x) = (3x + 2y - 1)^2 + (2x - 3y + 4)^2$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és azok típusát.

Lokális szélsőértékhelyek az alábbi egyenletrendszer megoldásai (**3 pont**):

$$0 = f'_x = 6(3x + 2y - 1) + 4(2x - 3y + 4) = 26x + 10,$$

$$0 = f'_y = 4(3x + 2y - 1) - 6(2x - 3y + 4) = 26y - 28,$$

vagyis csak a $\left(-\frac{5}{13}, \frac{14}{13}\right)$ pontban lehet lokális minimum illetve maximum (**2 pont**). Itt

$$\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 26 & 0 \\ 0 & 26 \end{bmatrix} = 26^2 > 0, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

és $f''_{xx} > 0$, tehát itt lokális minimum van (**2 pont**).

---

9. feladat (10 pont)

Írja fel az

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

függvény Fourier sorát, és annak összegfüggvényét. Egyenletes a konvergencia?

A függvény páratlan, így $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$. (**2 pont**)

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(kx)}{k}dx = -\frac{\cos(k\frac{\pi}{2})}{k} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{k}, & \text{ha } k = 4l, \\ \frac{2}{\pi k^2}, & \text{ha } k = 4l+1, \\ \frac{1}{k}, & \text{ha } k = 4l+2, \\ -\frac{2}{\pi k^2}, & \text{ha } k = 4l+3. \end{cases} \qquad (l \in \mathbb{N})$$

(**4 pont**) A Dirichlet-tétel alapján

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ -\frac{\pi}{4}, & x = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4}, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

és mivel az összegfügvény nem folytonos, ezért a konvergencia nem egyenletes. (**1 pont**)