Megoldás

1. feladat — 24 pont

- Hol deriválható az
$$f(x) = |x| \ln(|x| + 1)$$
függvény? Adja meg a deriváltfüggvényt!
- Hol deriválható a
$$g(x) = \cos\left(\frac{3x^2 \operatorname{arctg}(x^2)}{3^x}\right)$$
függvény? Adja meg a deriváltfüggvényt!

Megoldás:

- $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{|x|}{x}}_{\text{korl. } (\pm 1)} \underbrace{\ln(|x| + 1)}_{\to 0} \right) = 0$$

  Ha $x > 0$, akkor $f'(x) = (x\ln(x+1))' = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$.

  Ha $x < 0$, akkor $f'(x) = (-x\ln(1-x))' = -\ln(1-x) + \dfrac{x}{1-x}$. $\boxed{\textbf{12p.}}$

  (Mindenhol deriválható.)

- $$g'(x) = -\sin\left(\frac{3x^2 \operatorname{arctg}(x^2)}{3^x}\right) \frac{\left(6x \operatorname{arctg}(x^2) + 3x^2 \dfrac{2x}{x^4+1}\right) 3^x - 3x^2 \operatorname{arctg}(x^2)\, 3^x \ln 3}{9^x}$$

  $\boxed{\textbf{12p.}}$

  (Mindenhol deriválható.)

2. feladat **25 pont**

Igazolja , hogy az

$$(x(t), y(t)) = (2t + \mathrm{e}^{t-1}, t^6 + t^2 + t)$$

paraméteresen megadott görbe egy $y = f(x)$ függvény grafikonja!

Adja meg $t_0 = 1$ paraméterhez tartozó $(x(t_0), y(t_0))$ pontbeli érintő egyenletét, ha létezik!

Megoldás: Mivel $x'(t) = 2 + \mathrm{e}^{t-1} > 0$, ezért $x(t)$ szigorúan monoton növő, így létezik inverze. Ha ez $t = \varphi(x)$, akkor $f(x) = y(\varphi(x))$ megfelelő. $\boxed{\textbf{10p.}}$

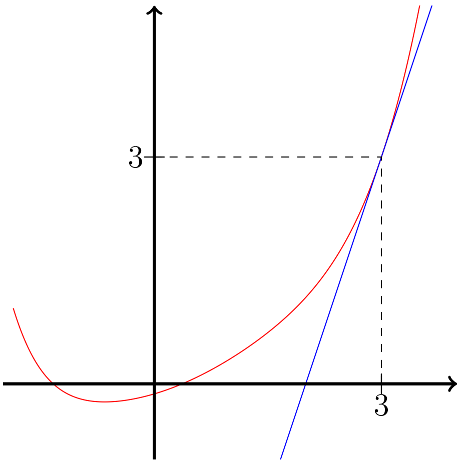
$x_0 = x(t_0) = x(1) = 3$

$f(x_0) = y_0 = y(t_0) = y(1) = 3$

$y'(t) = 6t^5 + 2t + 1$

$$f'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{9}{3} = 3$$

Az érintő egyenlete $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 3(x-3) + 3 = 3x - 6$ $\boxed{\textbf{15p.}}$



3. feladat **26 pont**

Adja meg a következő határértékeket, ha léteznek!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(x^2 \cdot \ln^2 x\right)$

Megoldás:

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{3x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{9x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{9x^3} = 0 \boxed{\textbf{11p.}}$$

(b) $$\lim_{x\to 0+} \frac{\overbrace{\ln^2 x}^{\to\infty}}{\underbrace{x^3}_{\to 0+}} = \infty \boxed{\textbf{4p.}}$$

(c) $$\lim_{x\to 0+} \big(\underbrace{x^2}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln^2 x}_{\to\infty}\big) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{x^{-2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x}{-2x^{-2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{x}}{4x^{-3}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{2} = 0 \boxed{\textbf{11p.}}$$

4. feladat — 25 pont

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x^2 + x - 1}{x - 1}$$

függvény szigorúan monoton!

Hol van lokális szélsőértéke?

Van-e globális minimuma illetve maximuma?

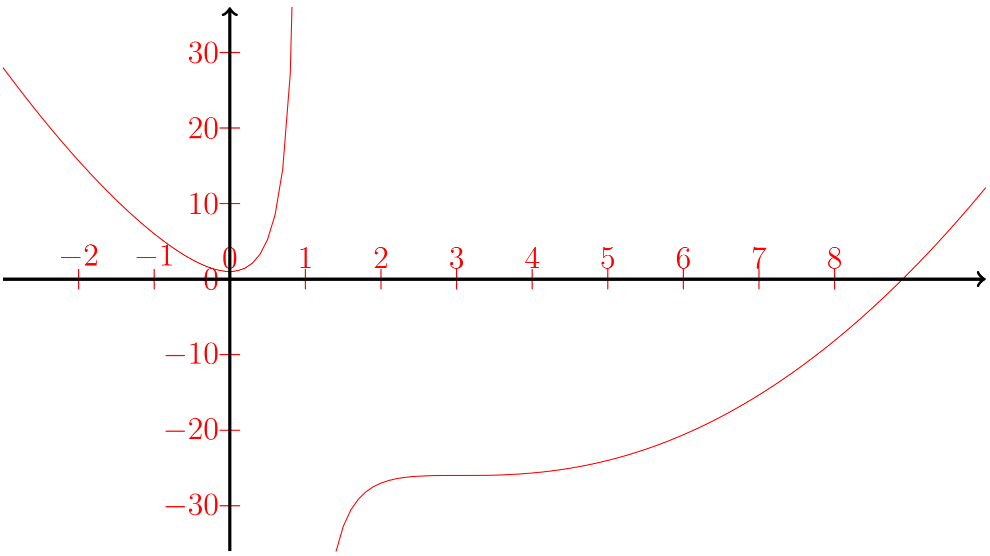
Megoldás: $f'(x) = \dfrac{(3x^2 - 18x + 1)(x-1) - (x^3 - 9x^2 + x - 1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-3)^2}{(x-1)^2}$ $\boxed{\textbf{5p.}}$

gyökei $x_1 = 0$ és $x_{2,3} = 3$

	$]-\infty,0[$	0	$]0,1[$	$]1,3[$	3	$]3,\infty[$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$

Az f függvény szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty, 0]$ intervallumon.
Az f függvény szigorúan monoton növő a $[0,1[$ és az $]1,\infty[$ intervallumokon.
Lokális minimuma van a 0-ban. $\boxed{\textbf{15p.}}$

Globális minimuma nincs és maximuma sincs, mert $\lim\limits_{x\to1\pm} \dfrac{\overbrace{x^3 - 9x^2 + x - 1}^{\to -8}}{\underbrace{x-1}_{\to 0\pm}} = \mp\infty$ $\boxed{\textbf{5p.}}$



IMSC **feladat** — 8 pont

Van-e az $f(x) = x^5 - 10x^3 + 48x + 2$ és a $g(x) = x^6 - 10x^3 + 48$ függvények között olyan, ami invertálható, és inverze deriválható az $a = 2$ helyen? Ha igen, válasszon egy ilyet, és adja meg az inverzének a 2-beli deriváltját!

Megoldás: $f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 48 = 5\left(x^2 - 3\right)^2 + 3 > 0$, így f szigorúan monoton növő, ezért invertálható.
$f^{-1}(2) = x \iff f(x) = 2 \iff x = 0.$
Mivel $f'(0) = 3 \neq 0$, ezért f^{-1} deriválható $f(0) = 2$-ben, és $\left(f^{-1}\right)'(2) = \left(f^{-1}\right)'(f(0)) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3}$.