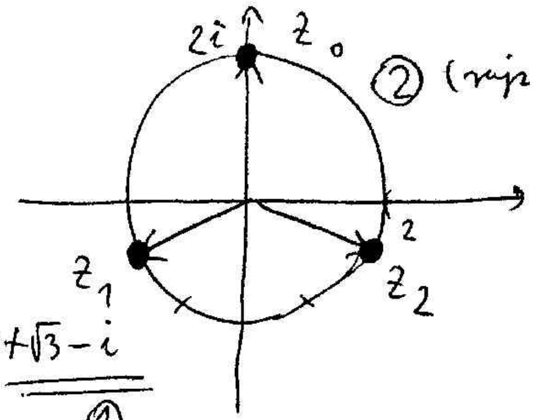
INF. AN1. VD4. MEGOLD. | -1- | 2019. 01. 18.

1, $\boxed{10}$ $(-iz)^3 = 8 \Rightarrow z^3 = -8i = 8\cdot e^{\frac{3\pi}{2}i}$

$z_k = 2\cdot e^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)i}$, $k = 0,1,2$ (5)

$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = \underline{\underline{2i}}$ (1)

$z_1 = 2\cdot e^{\frac{7\pi}{6}i} = \underline{\underline{-\sqrt{3}-i}}$ (1) ; $z_2 = 2\cdot e^{\frac{11\pi}{6}i} = \underline{\underline{+\sqrt{3}-i}}$ (1)



(2) (rajz)

2, a, $\boxed{7}$ $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right| = \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}}$ (3) $\le \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \varepsilon$, ha $|a_n - A| < \sqrt{A}\,\varepsilon$, (4)

tehát az eredeti sorozat $\sqrt{A}\cdot\varepsilon$-hoz tartozó küszöbindexe jó a $\sqrt{a_n}$ sorozathoz, és ε-hoz.

b, i, $\boxed{6}$ $\sqrt{\frac{3n^2+2}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{3n^2+2}{n^2+2n+1}}$ (2) $= \sqrt{\frac{3+\overbrace{2/n^2}^{\to 0}}{1+\underbrace{2/n}_{\to 0}+\underbrace{1/n^2}_{\to 0}}}$ (2) $\xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{\frac{3}{1}} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$ (2)

$\boxed{7}$ ii, $\sqrt{n^2+3n+1} - n = \frac{\cancel{n^2}+3n+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+3n+1}+n}$ (3) $= \frac{3+\overbrace{1/n}^{\to 0}}{\sqrt{1+\underbrace{3/n}_{\to 0}+\underbrace{1/n^2}_{\to 0}}+1}$ (2) $\xrightarrow{n\to\infty} \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$ (2)

3, a, $\boxed{4}$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ha x_0 a D_f torlódási pontja, (1) és

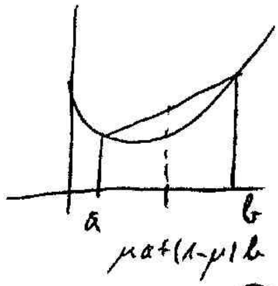
$\forall\varepsilon>0$ esetén $\exists\,\delta(\varepsilon)>0$, hogy $|f(x)-A|<\varepsilon$, ha $x\in D_f\cap \dot{K}_\delta(x_0)$ (3)

b, i, $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\sin(x^2+1)}^{\text{korlátos (2)}}}{\underbrace{x^2}_{\to\infty\ (2)}} = \underline{\underline{0}}$, (1) mivel a számláló korlátos, és a nevező $\to +\infty$

ii, $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{arctg}(5x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\operatorname{ch}(2x)}{\left(\frac{5}{1+(5x)^2}\right)}$ (2) (2) $= \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$ (2)

4/a, D.: f az I intervallumon konvex, ha az intervallumon ④
$\boxed{4}$ a függvény bármely húrja a függvény görbéje fölött van,
azaz bármely $a, b \in I$, $a < b$, $\mu \in [0,1]$ esetén

$$\mu f(a) + (1-\mu) f(b) \geq f(\mu a + (1-\mu) b)$$



$\boxed{11}$ b, $f(x) = x^2 e^{-x}$; $f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2) e^{-x}$ ③

$f''(x) = (2-2x) e^{-x} + (-2x + x^2) e^{-x} = (x^2 - 4x + 2) e^{-x} =$ ③

$= (x - x_1)(x - x_2) \underbrace{e^{-x}}_{>0}$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2}$ ③

x	$x < 2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2} < x$
f''	+	0	−	0	+
f	$\cup$ konvex	infl. pont	$\cap$ konkáv	infl. pont	$\cup$ konvex

②

5* a, $\boxed{7}$ $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \int (2x+3)^{-1/2}\,dx = \frac{(2x+3)^{+1/2}}{(1/2)\cdot 2} + C = \underline{\underline{\sqrt{2x+3} + C}}$ ② ⑤

b, $\boxed{7}$ $\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx = \frac{1}{4}\int \underbrace{4x\sqrt{2x^2+3}}_{f' \cdot f^{1/2} \text{ alak}}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{(2x^2+3)^{3/2}}{3/2} + C = \underline{\underline{\frac{1}{6}(2x^2+3)^{3/2} + C}}$ ③ ④

c, $\boxed{7}$ $\int \underset{u}{(3x+2)}\; \underset{v'}{e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}(3x+2)e^{2x} - \int 3\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx =$ ④

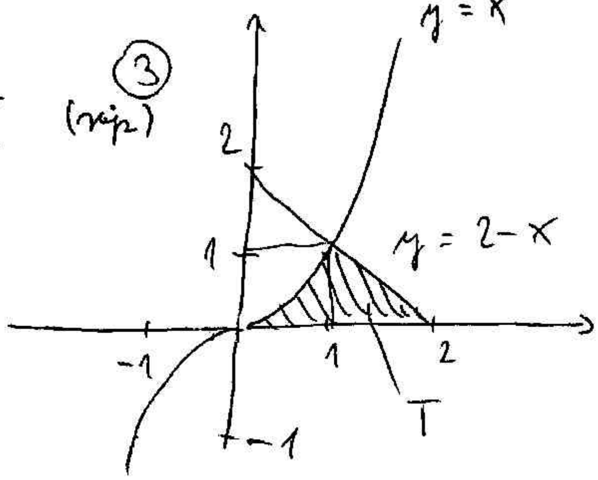
$u' = 3 \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$ $\quad = \underline{\underline{\frac{3x+2}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C}}$ ③

6*, a, T.: Ha f az $[a,b]$ intervallumon integrálható, (1) és $\forall x \in [a,b]$-re

[4] $F'(x) = f(x)$, (1) akkor $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$. (2)

b, [6] $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx$ (2) $= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2}$ (3) $= \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$ (1)

7*, [9] (rajz) (3)



$T = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx =$ (2)

$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$ (2)

$= \frac{1}{4} + \left(2 - \frac{3}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$ (2)

IMSC:

a, $t \in \overline{\mathbb{R}}$ az $A \subset \mathbb{R}$ torlódási pontja, ha t minden környezete

[4] tartalmazza A-nak legalább egy t-től különböző pontját

$\Longleftrightarrow$ t $\forall$ környezete A-nak végtelen sok pontját tartalmazza.

b, i, Hamis, $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\operatorname{tor} A = \{0\}$

(2) vagy $\operatorname{tor} \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{R}}$

(2) ii, Hamis, $\operatorname{tor} \mathbb{N} = \{+\infty\}$

(2) iii, Igaz, Pl.: $A = \{1, 2, 3\} \neq \emptyset$; $\operatorname{tor} A = \emptyset$

(4) iv, Hamis. Ha A korlátos, akkor elemeiből alkotott tetszőleges (rész)sorozatnak a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel értelmében van konvergens részsorozata; ennek limesze $\in \operatorname{tor} A$.

Ha A felülről vagy alulról nem korlátos, akkor $+\infty \in \operatorname{tor} A$ vagy $-\infty \in \operatorname{tor} A$.