$$D(z)=\frac{b_1 z + b_2}{z^2+a_1 z+a_2} = \frac{b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$y(t)+a_1 y(t-1)+a_2 y(t-2) = b_1 u(t-1)+b_2 u(t-2)$$

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2)$$

$y(t)=\varphi^T(t)\vartheta$ lineáris paraméter becslési feladat

$\varphi^T(t) = [-y(t-1)\ -y(t-2)\ u(t-1)\ u(t-2)]$; $\vartheta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}$; $\phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}$

(1) $\phi^T\phi\,\hat{\vartheta}^{LS} = \phi^T Y$ Normál egyenlet

(2) $\hat{\vartheta}^{LS} = [\phi^T\phi]^{-1}\phi^T Y$

$q^{-1}x(t) = x(t-1)$ AR modell (nincs bemenő jel): $A(q)=1+a_1 q^{-1}+\dots+a_{n_a}q^{-n_a}$

$q^{-k}x(t) = x(t-k)$ $A(q)y(t)=e(t)$

fehér zaj

MA modell: $y(t) = C(q)\,e(t)$

$y(t)=e(t)+c_1 e(t-1)+\dots+c_{n_c}e(t-n_c)$ $y(t)+a_1 y(t-1)+\dots+a_{n_a}y(t-n_a)=e(t)$

AR: $A(q)y(t)=e(t)$

ARX: $A(q)y(t) = B(q)u(t-n_k)+e(t)$

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}q^{-n_k}u(t) + \frac{1}{A(q)}e(t)$$

- LS (legkisebb négyzetek módszer)
- IV4 (négylépéses segédváltozó módszer)

$\boxed{LS}$ $\hat{\vartheta}^{LS} = \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\,y(t)\right]$

$$y(t) = \varphi^T(t)\vartheta_0 + v_0(t)$$

$$\hat{\vartheta}^{LS} = \vartheta_0 + \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1}}_{R_{\varphi\varphi}}\underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\,v_0(t)\right]}_{h_{\varphi v_0}}$$

Fehérítés problémája

$\boxed{\text{IV}}$

Solve $\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \underbrace{\cancel{\varphi(t)}}_{\xi(t)} [y(t) - \varphi^T(t)\vartheta] = 0\right]$

$$\hat{\vartheta}^{IV} = \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \xi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\xi(t)y(t)\right] \longrightarrow \boxed{\text{IV4}}$$

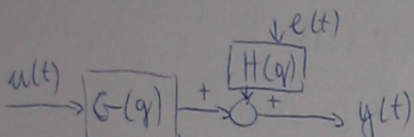
IV4:
- LS
- IV (egyszerű)
- AR → $\hat{L}(q)$
- szűrés → IV

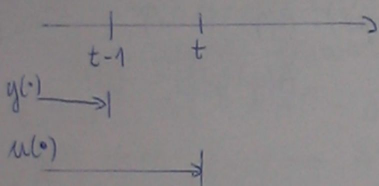
ARMAX: $A(q)y(t) = B(q)u(t-n_k) + C(q)e(t)$

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)} q^{-n_k} u(t) + \frac{C(q)}{A(q)} e(t)$$

Numerikus optimalizálás ⟶ kvázi Newton-módszer

$$V(\vartheta, N) \longrightarrow V'(\vartheta, N) \longrightarrow V''(\vartheta, N) = \begin{matrix} 1.\text{ tag} + 2.\text{ tag} \\ ? \quad \text{számítható} \\ \approx \emptyset \end{matrix}$$





$$H = 1 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \dots =$$
$$= 1 + q^{-1}\tilde{H}(q) \Rightarrow \tilde{H} = q(H-1)$$

$$\hat{y}(t|t-1) = [1 - q^{-1}\tilde{H}(q)H^{-1}(q)]\,G(q)u(t) + q^{-1}\tilde{H}(q)H^{-1}(q)y(t)$$

$$\tilde{H} = q(H-1) \Rightarrow 1 - q^{-1}\tilde{H}H^{-1} = H^{-1}$$
$$q^{-1}\tilde{H}H^{-1} = (1 - H^{-1})$$

$$\hat{y}(t|t-1) = H^{-1}(q)G(q)u(t) + [1 - H^{-1}(q)]y(t)$$

ARX ✓

ARMAX: $y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + \frac{C(q)}{A(q)}y(t) \Rightarrow G = \frac{B}{A},\ H = \frac{C}{A} \rightarrow H^{-1} = \frac{A}{C}$

$$H^{-1}G = \frac{\cancel{A}}{C}\frac{B}{\cancel{A}}$$

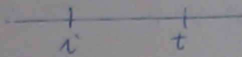
$$\hat{y}(t) = \frac{B(q)}{C(q)}u(t) + \left[1 - \frac{A(q)}{C(q)}\right]y(t)$$

kvázi Newton-módszer ✓

$$\frac{\partial \hat{y}(t)}{\partial a_k} = -\frac{1}{C(q)}\underbrace{q^{-k}y(t)}_{y(t-k)}$$

Felejtés szimulálása az adatsorban:

$\lambda \in (0,1]$



$$V(\vartheta,t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda^{t-i}\,\|y(i)-\varphi^T(i)\vartheta\|^2$$

WLS módszer: $W=\mathrm{diag}\left(\lambda^{t-1}I_m,\dots,\lambda I_m,\lambda^0 I_m\right)$

$$\underbrace{\Phi^T\Lambda\Phi\hat{\vartheta}}(t)=\underbrace{\Phi^T\Lambda Y}$$

$$\sum_{i=1}^{t}\lambda^{t-i}\varphi(i)\varphi^T(i)\hat{\vartheta}(t)=\sum_{i=1}^{t}\lambda^{t-i}\varphi(i)y(i)$$

$$P(t)=\left[\sum_{i=1}^{t}\lambda^{t-i}\varphi(i)\varphi^T(i)\right]^{-1}=\left[\sum_{i=1}^{t-1}\lambda\lambda^{t-1-i}\varphi(i)\varphi^T(i)+\varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1}=$$

$$=\Big[\lambda\underbrace{\sum_{i=1}^{t-1}\lambda^{(t-1)-i}\varphi(i)\varphi^T(i)}_{[P(t-1)]^{-1}}+\varphi(t)\varphi^T(t)\Big]^{-1}$$

$$P(t)=\left[\lambda P^{-1}(t-1)+\varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1}$$

Mátrix inverz lemma:

$$[A+BCD]^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B\left[C^{-1}+DA^{-1}B\right]^{-1}DA^{-1}$$

$A=\lambda P^{-1}(t-1)\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\lambda}P(t-1)$, $B=\varphi(t)$, $C=I$, $D=\varphi^T(t)$

$$P(t)=\frac{1}{\lambda}\left\{P(t-1)-P(t-1)\varphi(t)\left[\lambda I+\varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)\right]^{-1}\varphi^T(t)P(t-1)\right\}$$

$$\hat{\vartheta}(t)=P(t)\sum_{i=1}^{t}\lambda^{t-i}\cdot\varphi(i)y(i)=P(t)\left\{\lambda\sum_{i=1}^{t-1}\lambda^{(t-1)-i}\varphi(i)y(i)+\varphi(t)y(t)\right\}$$

$$\hat{\vartheta}(t-1)=P(t-1)\underbrace{\sum_{i=1}^{t-1}\lambda^{(t-1)-i}\varphi(i)y(i)}$$

$$P^{-1}(t-1)\hat{\vartheta}(t-1)=\sum_{i=1}^{t-1}\lambda^{(t-1)-i}\varphi(i)y(i)$$

$$\hat{\vartheta}(t)=P(t)\left\{\lambda P^{-1}(t-1)\hat{\vartheta}(t-1)+\varphi(t)y(t)\right\}$$

$$P^{-1}(t)=\lambda P^{-1}(t-1)+\varphi(t)\varphi^T(t)\Rightarrow P^{-1}(t-1)=\frac{1}{\lambda}\left[P^{-1}(t)-\varphi(t)\varphi^T(t)\right]$$

$$\hat{\vartheta}(t)=P(t)\left\{\cancel{\lambda}\cancel{\tfrac{1}{\lambda}}\left[P^{-1}(t)-\varphi(t)\varphi^T(t)\right]\hat{\vartheta}(t-1)+\varphi(t)y(t)\right\}$$

$$\hat{\vartheta}(t)=\hat{\vartheta}(t-1)+P(t)\varphi(t)\Big[y(t)-\underbrace{\varphi^T(t)\hat{\vartheta}(t-1)}_{\text{jóslás}}\Big]$$

$\longrightarrow$

Rekurzív paraméterbecslési feladat:

$$V(\vartheta, t) = \sum_{i=1}^{t} \lambda^{t-i} \| y(i) - \varphi^T(i)\vartheta \|^2 \rightarrow \text{minimalizáljuk:}$$

A Megoldás: $\underline{\underline{P(t)}} = \frac{1}{\lambda}\left\{ P(t-1) - P(t-1)\varphi(t)\left[\lambda I + \varphi^T(t) P(t-1)\varphi(t)\right]^{-1}\varphi^T(t) P(t-1)\right\}$

$$\underline{\underline{\hat{\vartheta}(t)}} = \hat{\vartheta}(t-1) + P(t)\varphi(t)\left[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\vartheta}(t-1)\right]$$

$\longleftrightarrow$ identifikált ARX modell $A(q)$, $B(q)$ paraméterei

$\hat{\vartheta}(0)$, $P(0)$

① $\hat{\vartheta}(0) = \hat{\vartheta}^{LS}(N)$, $P(0) = P^{-1}(N)$

② $\hat{\vartheta}(0) =$ nulla v. véletlen, $P(0) = \sigma I$, $\sigma \gg 1$

Nem lineáris rendszerek stabilitása

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = g(x, u)$$

(x_0, u_0, y_0) munkapont

Linearizálás: $\delta x, \delta u, \delta y$ kisváltozások

$$\delta\dot{x} = A\,\delta x + B\,\delta u$$
$$\delta y = C\,\delta x + D\,\delta u$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} ; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{x_0, u_0}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} ; \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{x_0, u_0}$$

$x_0(t)$, $u_0(t)$ pálya időfüggő

Kis változásokra:

$$\delta\dot{x} = A(t)\delta x + B(t)\delta u$$

$$\delta y = C(t)\delta x + D(t)\delta u$$

Időben változó vagy nem lin. rendszernek nincs átviteli fv.-e!

Stabilitás definíciók NEM lin. rendszerek esetén:

Def. (Ljapunov - stabilitás):

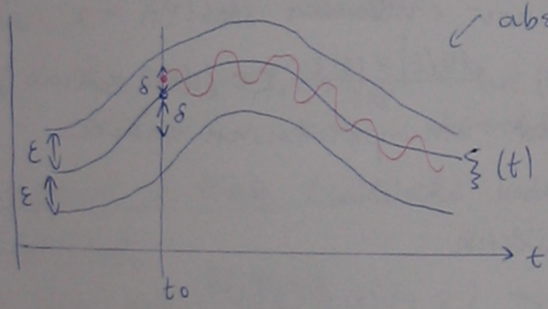
Tfh. $\xi(t)$ megoldása az $\dot{x} = f(t, x)$ állapotegyenletnek.

(pl. u = const, vagy $u(t)$ rögzített)

f értelmezve van $[a, \infty) \times D$

nyílt halmaz

Amh. (azt mondjuk, hogy) $\xi(t)$ megoldás Ljapunov-értelemben stabil, ha $\forall$ $t_0 \in [a, \infty)$ és $\forall$ $\varepsilon > 0$ esetén $\exists$ $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$, hogy ha $|x(t_0) - \xi(t_0)| < \delta(t_0, \varepsilon)$, akkor $\forall$ $t \geq t_0$ esetén $x(t)$ megoldásra teljesül $|x(t) - \xi(t)| < \varepsilon$.



A megoldás $\xi(t)$ környezetében maradt.

- $\xi(t)$ instabil, ha nem stabil :)
- $\xi(t)$ egyenletesen stabil, ha $\delta(t_0, \varepsilon) = \delta(\varepsilon) > 0$, azaz nem függ t_0-tól
- $\xi(t)$ aszimptotikusan st., ha Ljapunov-stabil és $\forall$ $t_0 \in [a, \infty)$ esetén $\exists$ $\delta_1(t_0) > 0$, hogy ha $|x(t_0) - \xi(t_0)| < \delta_1(t_0)$, akkor $\lim_{t\to\infty} |x(t) - \xi(t)| = 0$

$\xi(t)$ transtformálása a nulla pontban

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \xi(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \tilde{x}(t) + \xi(t)$$

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\xi(t)}{dt} = f(t, \tilde{x}(t) + \xi(t)) - f(t, \xi(t)) = \tilde{f}(t, \tilde{x}(t))$$

$\tilde{f}(t,0) \equiv 0$ Továbbiakban a hullámot elhagyjuk:

$\cancel{\tilde{f}} \rightarrow f$; $\xi \equiv 0$ egyensúlyi pont

Definíció (pozitív definit fv.):

$V(t,x)$ pozitív definit, ha $\exists\, W(x)$ skalárértékű fv., hogy $\forall |x| \neq 0$ esetén $V(t,x) \geq W(x) > 0$, és $V(t,0) \equiv W(0) = 0$.

Tétel (Ljapunov 1. tétele vagy direkt módszer):

(1) Ha $\exists\, V(t,x)$ pozitív definit fv. (úgynevezett Ljapunov-fv.), hogy az állapotegyenlet $\forall\, x(t)$ megoldására teljesül

$$\dot{V}(t,x) = \frac{dV(t, x(t))}{dt} \leq 0 \text{ (negatív szemidefinit)},$$ akkor a

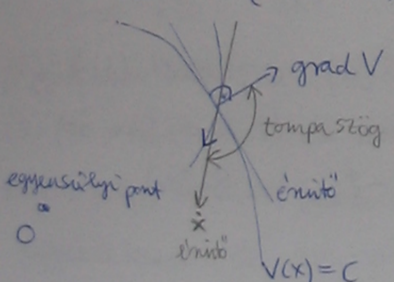
$\xi \equiv 0$ egyensúlyi pont Ljapunov értelemben stabil.

(2) Ha pótlólagosan a $\dot{V}(t,x) = \dfrac{dV(t,x(t))}{dt} < 0$ (neg. definit), akkor a $\xi \equiv 0$ egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis.

- Illusztráció: $\dot{x} = f(x)$ esetén

$V(x)$ poz. def., $V(x) = c$ (const.) felületek

$$c_1 < c_2 \Rightarrow \{x : V(x) \leq c_1\} \subset \{x : V(x) \leq c_2\}$$



tompaszög $\longleftrightarrow$ 0 felé halad az $x(t)$ trajektória

$$\dot{V} = \frac{dV(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Most: $V(x) \Rightarrow \dot{V} = \langle \text{grad}\, V, f \rangle = \underbrace{\langle \text{grad}\, V, \dot{x} \rangle < 0}$

skalár szorzat

$\Rightarrow$ aszimptotikusan stabil (negatív definitség)