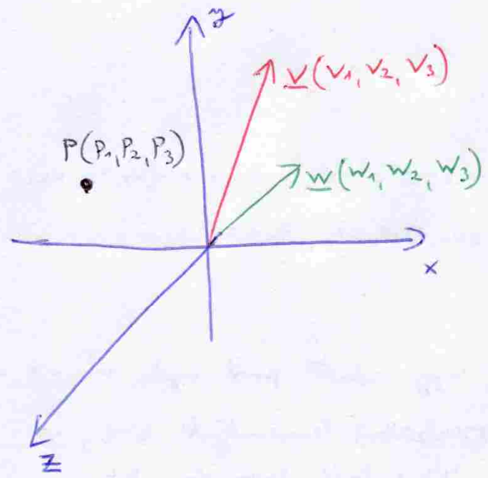
1. TÉTEL

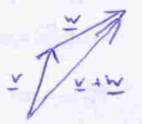


Térbeli koordinátageometriában egy pont jellemzése a 3 koordinátájával: $P(p_1, p_2, p_3)$

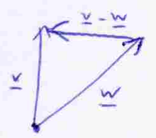
A ponthoz húzott irányított szakasz a vektor, pl.: $\underline{v}(v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w}(w_1, w_2, w_3)$

Műveletek:

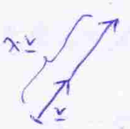
összeadás: $\underline{v} + \underline{w} \ (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$



kivonás: $\underline{v} - \underline{w} \ (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3)$



skalárral való szorzás:



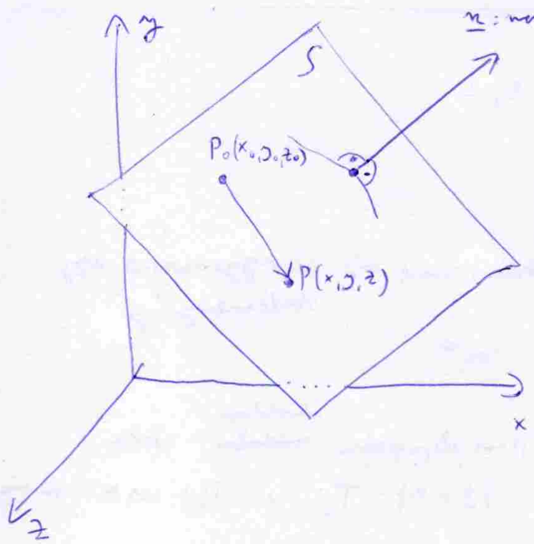
$\lambda \cdot \underline{v} \ (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$

skaláris szorzat:

$\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos\left[\sphericalangle(\underline{v}, \underline{w})\right]$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

Sík egyenlete:



$\underline{n}$: normálvektor

$$\left.\begin{array}{l} P_0\,(x_0, y_0, z_0) \\ \underline{n}\,(n_1, n_2, n_3) \end{array}\right\} \text{síkot meghatározó adatok}$$

Mitől függ, hogy P rajta van-e a síkon?

$P \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \underline{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \underline{n} = 0 \Leftrightarrow (\underline{P} - \underline{P_0}) \cdot \underline{n} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - x_0) n_1 + (y - y_0) n_2 + (z - z_0) n_3 = 0 \Leftrightarrow$

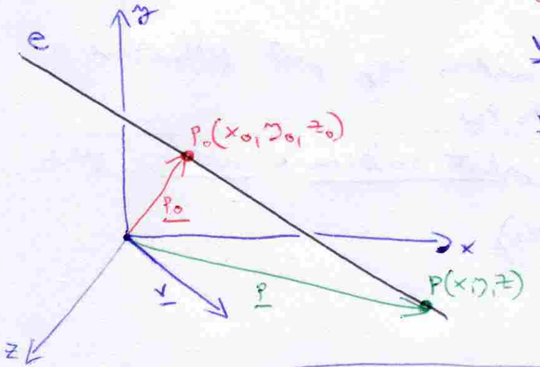
$\Leftrightarrow \boxed{n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 z_0}$ a sík normálvektoros egyenlete

pl.: $P_0(2, 3, 4)$ $\underline{n}(5, 6, 7)$

$$\Downarrow$$

$$5x + 6y + 7z = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4$$

egyenes egyenletrendszere:



$P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\underline{v}(v_1, v_2, v_3)$ } egyenest meghatározó adatok

$\underline{v}$: irányvektor, $\underline{v} \parallel e$

Mitől függ, hogy $P \in e$?

$P \in e \iff \exists t \in \mathbb{R}: \underline{p} = \underline{p_0} + t \cdot \underline{v} = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (v_1, v_2, v_3) =$
$= (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3)$

egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 & t \in \mathbb{R} \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}$$

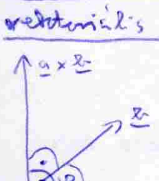
Ha meg akarjuk vizsgálni, hogy egy adott pont rajta van-e az egyenesen, akkor mindhárom egyenletből kiszámítjuk t-t, és mindhárom esetben ugyanazt az értéket kell, hogy kapjuk.

$\downarrow$ t-re rendezve

- $t = \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$ ha $v_1, v_2, v_3 \neq 0$!
- Ha pl. $v_3 = 0$, de $v_1, v_2 \neq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} \\ z = z_0 \end{cases}$
- Ha $v_2 = v_3 = 0$, de $v_1 \neq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$

Metszéspont, metszésvonal számításához egyszerűen venni kell mindkét ponthalmaz egyenletét/egyenleteit, és meg kell oldani az egyenletrendszert.

vektoriális szorzat



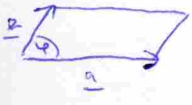
jelölés: $\underline{a} \times \underline{b}$ (ejtsd: a kereszt bé)

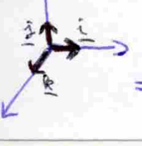
tulajdonságok:

- $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \big[\overbrace{\sphericalangle(\underline{a}, \underline{b})}^{\varphi}\big]$
- $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}, \underline{b}$
- $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ jobbsodrású rendszert alkot

egy felhasználás:
paralelogramma területének kiszámítása:

$$T = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\varphi = |\underline{a} \times \underline{b}|$$





$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \overbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}^{\lambda_1} \cdot \underline{i} + \overbrace{\left(-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\right)}^{\lambda_2} \underline{j} + \overbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}^{\lambda_3} \cdot \underline{k}$$

vegyesszorzat

3 vektor művelete: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

jelölés: $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$

$$\boxed{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}}$$

vektoriális szorzat

skaláris szorzat $\Rightarrow$ a vegyesszorzat egy skalármennyiség

$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot |\underline{c}| \cdot \cos\varphi$

Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy paralelepipedon élvektorai ~~oldalai~~, akkor
$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = V_p$, ahol: $|\underline{a} \times \underline{b}| = T_{\square}$ és $|\underline{c}| \cdot \cos\varphi = m$ magasság

Fontos tudni, hogy ez egy előjeles térfogat!

A vegyesszorzat akkor lehet negatív, ha $\cos\varphi < 0$, vagyis $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ 90°-nál nagyobb szöget zár be egymással.

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. TÉTEL

DEF.: egy T legalább kételemű halmazt <u>kommutatív testnek</u> nevezünk, ha:

- értelmezve van 2 művelet: összeadás, szorzás
- összeadás: asszociatív, kommutatív, $\exists 0$, $\forall$ elemnek $\exists$ additív inverze
- szorzás: assz., komm., $\exists 1$, 0-n kívül $\forall$ elemnek $\exists$ multiplikatív inverze
- disztributív $a, b, c \in T$-re: $a(b+c) = ab + ac$

Kom. test pl.: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

DEF.: egy V nemüres halmazt <u>vektortérnek</u> nevezünk egy T tetszőleges kom. test felett, ha teljesülnek a következő vektortéraxiómák:

Ö: $\exists$ egy összeadás nevű művelet: $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$-hez egyértelműen hozzárendelünk egy V-beli elemet: $\underline{u} \oplus \underline{v}$

Ö1: asszociatív: $(\underline{u} \oplus \underline{v}) \oplus \underline{w} = \underline{u} \oplus (\underline{v} \oplus \underline{w})$

Ö2: kommutatív: $\underline{u} \oplus \underline{v} = \underline{v} \oplus \underline{u}$

Ö3: létezik nullelem: $\exists\, \underline{0} \in V$ amire $\underline{v} \oplus \underline{0} = \underline{v}$

Ö4: $\forall$ elemnek $\exists$ ellentettje: $\forall \underline{v} \in V$ $\exists (-\underline{v}) \in V$ amire $\underline{v} \oplus (-\underline{v}) = \underline{0}$

S: a T test és V halmaz között értelmezve van egy skalárral való szorzás nevű művelet:

$\forall \lambda \in T$ és $\underline{u} \in V$-hez egyértelműen hozzárendelünk egy V-beli elemet: $\lambda \odot \underline{v}$

S1: $(\lambda + \mu) \odot \underline{v} = \lambda \odot \underline{v} \oplus \mu \odot \underline{v}$

S2: $\lambda \odot (\underline{u} \oplus \underline{v}) = \lambda \odot \underline{u} \oplus \lambda \odot \underline{v}$

S3: $\mu \odot (\lambda \odot \underline{v}) = (\mu \cdot \lambda) \odot \underline{v}$

S4: $1 \odot \underline{v} = \underline{v}$ (ahol 1 a T test egységeleme, azaz $\forall \lambda \in T$-re $1 \cdot \lambda = \lambda \cdot 1 = \lambda$)

DEF.: $\underline{u} \ominus \underline{v} = \underline{u} \oplus (-\underline{v})$ kivonás: $\underline{v}$ ellentettvektorát kell hozzáadni $\underline{u}$-hoz

Skaláris szorzás nincs a vektortereknél!

TÉTEL: (i) $\lambda \odot \underline{0} = \underline{0}$

(ii) $0 \odot \underline{v} = \underline{0}$

(iii) $(-1) \odot \underline{v} = -\underline{v}$

(iv) $\lambda \odot \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \lambda = 0$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$

biz.: (i) $\underline{0} = \lambda \underline{0} \oplus (-\lambda \underline{0}) = \lambda(\underline{0} + \underline{0}) + (-\lambda \underline{0}) = (\lambda \underline{0} + \lambda \underline{0}) + (-\lambda \underline{0}) = \lambda \underline{0} + (\lambda \underline{0} + (-\lambda \underline{0})) = \lambda \underline{0}$ ✓

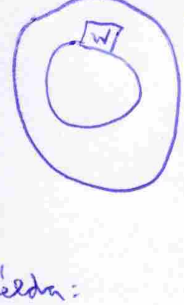
(ii) $\underline{0} = 0\underline{v} + (-0\underline{v}) = (0+0)\underline{v} + (-0\underline{v}) = (0\underline{v} + 0\underline{v}) + (-0\underline{v}) = 0\underline{v} + (0\underline{v} + (-0\underline{v})) = 0\underline{v}$ ✓

(iii) $(-1)\underline{v} = (-1)\underline{v} + \underline{0} = (-1)\underline{v} + (\underline{v} + (-\underline{v})) = ((-1)\underline{v} + \underline{v}) + (-\underline{v}) = ((-1)\underline{v} + 1\underline{v}) + (-\underline{v}) = (1-1)\underline{v} + (-\underline{v}) = 0\underline{v} + (-\underline{v}) = -\underline{v}$ ✓

(iv) $\lambda \underline{v} = \underline{0}$ és $\lambda \neq 0$: $\underline{0} = \frac{1}{\lambda}\underline{0} = \frac{1}{\lambda}(\lambda \underline{v}) = (\frac{1}{\lambda}\lambda)\underline{v} = 1\underline{v} = \underline{v}$ ✓

(– " – és $\underline{v} \neq \underline{0}$: $\underline{0} = 0\underline{v} = \underbrace{(\lambda - \lambda)\underline{v}}_{\lambda \underline{v} - \lambda \underline{v}} = \lambda \underline{v} \Rightarrow \lambda \underline{v} = 2\lambda \underline{v} \Rightarrow \lambda = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 0$ ✓)

Példák a vektortérre:
Az origóból kiinduló egyenes-, sík-, térvektorok a valós test felett a szokásos vektorösszeadásra és a valós számmal való szorzásra nézve.



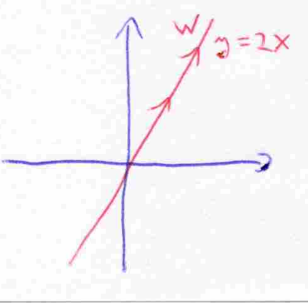
← sokszor egy vektortér részhalmazát is tekinthetjük vektortérnek

DEF.: V vektortér, $W \subseteq V$

W <u>altere</u> V-nek, ha W is vektortér a V-beli műveletekre

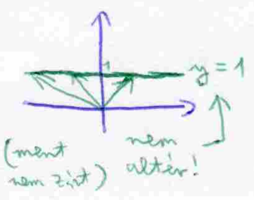
(pontosabban ezeknek a műveleteknek a W-re történő megszorításaira)

Példa:



$V = \mathbb{R}^2$ Jele: $W \leq V$

Ellenpélda:



Például a síkon belül az origón átmenő egyenesek alterek + az egész (maga a sík) és a nullvektorok.

TÉTEL: V vektortér, $\emptyset \neq W \subseteq V$

W altér $\iff$ (i) $\forall\, \underline{u}, \underline{v} \in W \quad \underline{u} + \underline{v} \in W$

(ii) $\forall\, \underline{v} \in W,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot \underline{v} \in W$

biz.: $\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$: meg kell nézni az axiómákat

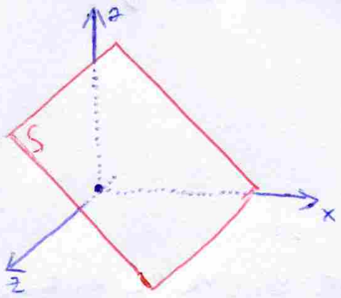
Ö1 – Ö2, S1 – S4 ✓ mint „mennyiség típusú" axiómák

Ö3: $\underline{v} \in W \overset{(ii)}{\Downarrow} 0 \cdot \underline{v} = \underline{0} \in W$

Ö4: $\underline{v} \in W \overset{(ii)}{\Downarrow} (-1) \cdot \underline{v} = -\underline{v} \in W$

3. TÉTEL

Térbeli vizsgálatok:



A síkban két nem párhuzamos, nem nullvektorral a sík összes vektora előállítható.
A térben ugyanez igaz, csak 3 vektorra.

DEF.: $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k \in V$ $\quad \lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$

$\lambda_1\underline{v}_1+\dots+\lambda_k\underline{v}_k \in V$ a $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ vektorokból, a $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ skalárokkal képzett lineáris kombináció

DEF.: a $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k \in V$ vektorok által generált altéren az $\underline{v}_i$ vektorok összes lin. kombinációinak halmazát értjük.

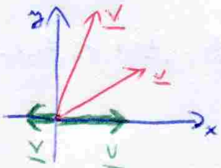
jelölés: $\langle \underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k \rangle = \{\lambda_1\underline{v}_1+\dots+\lambda_k\underline{v}_k \mid \lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}\}$

TÉTEL: $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k \in V)$ a $\langle \underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k \rangle$ gen. altér azért biztosan mindig altér V-ben, mert:

biz.: (i) $\underline{u} = \lambda_1\underline{v}_1+\dots+\lambda_k\underline{v}_k \quad \underline{w} = \mu_1\underline{v}_1+\dots+\mu_k\underline{v}_k \rightarrow \underline{u}+\underline{w} = (\lambda_1+\mu_1)\underline{v}_1+\dots+(\lambda_k+\mu_k)\underline{v}_k \in \langle \underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k \rangle$ ✓

(ii) $\underline{u} = \lambda_1\underline{v}_1+\dots+\lambda_k\underline{v}_k \rightarrow \alpha\cdot\underline{u} = (\alpha\lambda_1)\underline{v}_1+\dots+(\alpha\lambda_k)\underline{v}_k \in \langle \dots \rangle$ ✓

Példák:



$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \mathbb{R}^2$ ← tehát „kifeszíti" a síkot

$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ ← ez pedig csak az x-tengelyt

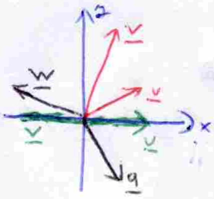
$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \boxed{z = 3x+y} \right\}$$

$3x+y-z=0$ ez egy sík egyenlete!

DEF.: $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k \in V$

Ha $\langle \underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k \rangle = V$ akkor $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ generátorrendszer

Példák:



$\underline{u}, \underline{v}$ gen. rsz. $\mathbb{R}^2$-ben

$\underline{u}, \underline{v}$ nem g.r. $\mathbb{R}^2$-ben

$\underline{u}, \underline{v}, \underline{q}, \underline{w}$ g.r. $\mathbb{R}^2$-ben

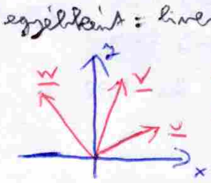
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nem g.r. $\mathbb{R}^3$-ben, de g.r. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x+y=z \right\}$-ben

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ g.r. W-ben, de $\mathbb{R}^3$-ban nem! (mert egy síkba esnek, úgy lettek megválasztva)

DEF.: $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha semelyik nem fejezhető ki a többivel lin. komb.-val

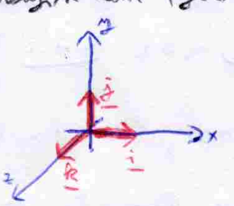
egyébként: lineárisan összefüggők

Példák:



$\underline{u}, \underline{v}$ lin. fgtl.

$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lin. öf.



$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ lin. fgtl.

DEF.: $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ lin. fgtl., ha $\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+\dots+\lambda_k\underline{v}_k = \underline{0}$ csak úgy fordulhat elő, hogy minden együttható 0, azaz $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_k=0$

TÉTEL: DEF $\Longleftrightarrow$ DEF

biz.: DEF $\Longrightarrow$ DEF irány bizonyítása:

indirekt: DEF nem teljesül

$$\underline{0} = \lambda_1 \underline{v_1} + \lambda_2 \underline{v_2} + \ldots + \lambda_k \underline{v_k}, \text{ nem } \forall \lambda_i = 0, \text{ pl. } \lambda_1 \neq 0$$

$$\underline{v_1} = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1}\underline{v_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\underline{v_3} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\underline{v_k}$$ ← $\underline{v_1}$ mégis kifejezhető a többivel DEF ↯

DEF $\Longrightarrow$ DEF irány biz.:

indirekt: DEF nem teljesül, valamelyik pl. $\underline{v_1}$ a többiből kifejezhető:

$$v_1 = \alpha_2 \underline{v_2} + \alpha_3 \underline{v_3} + \ldots + \alpha_k \underline{v_k}$$

$$1\, \underline{v_1} - \alpha_2 \underline{v_2} - \alpha_3 \underline{v_3} - \ldots - \alpha_k \underline{v_k} = \underline{0}$$

$1 \neq 0$ ← nem minden együttható 0! DEF ↯

TÉTEL: ha $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}$ lin. ftlen. $\Longrightarrow$ $\forall \underline{v} \in V$ legfeljebb egyféleképpen állítható elő, mint $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}$ lin. kombinációja

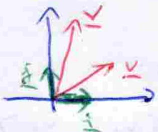
biz.: indirekt: tfh.: kétféleképp: $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v_1} + \ldots + \alpha_k \underline{v_k}$, $\underline{v} = \beta_1 \underline{v_1} + \ldots + \beta_k \underline{v_k}$ } van i, amire $\alpha_i \neq \beta_i$

kivonás

$$\underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\underline{v_1} + \ldots + (\alpha_k - \beta_k)\underline{v_k} \Longrightarrow$$ ez egy nem triviális lin. komb. ↯

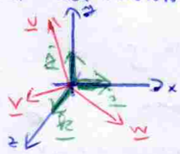
DEF.: $\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_n} \in V$ bázist alkotnak, ha ezen vektorok lin. ftlen.-ek és gen. rsz.-t alkotnak

Példa:



$\underline{u}, \underline{v}$ bázis

$\underline{i}, \underline{j}$ bázis



$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázis

$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ bázis — valamelyik 2 nincs egy síkban

DEF.: V vektortér, $\underline{b_1}, \underline{b_2}, \ldots, \underline{b_n}$ bázis V-ben $\Longrightarrow$ V dimenziója n. Jele: $\dim V = n$

TÉTEL: kicserélési tétel:

$F = \{\underline{f_1}, \ldots, \underline{f_k}\}$ lin. ftlen. rsz. } $G = \{\underline{g_1}, \ldots, \underline{g_m}\}$ gen. rsz. $\Longrightarrow$ $\forall \underline{f_i}$-hez található olyan $\underline{g_j}$, hogy $\underline{f_1}, \underline{f_2}, \ldots, \underline{f_{i-1}}, \underline{g_j}, \underline{f_{i+1}}, \ldots, \underline{f_k}$ lin. ftlen.

biz.:

Lemma: $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}$ lin. ftlen. ; $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}, \underline{v_{k+1}}$ lin. öf. } $\Longrightarrow \underline{v_{k+1}} \in \langle \underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k} \rangle$

biz.: $\lambda_1 \underline{v_1} + \ldots + \lambda_k \underline{v_k} + \lambda_{k+1} \underline{v_{k+1}} = \underline{0}$ egyenletnek van nem triviális megoldása, sőt: $\lambda_{k+1} \neq 0$, mert különben $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}$ mégis lin. öf., tehát: $\underline{v_{k+1}} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_{k+1}}\underline{v_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_{k+1}}\underline{v_2} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\underline{v_k}$ ✓

és most a kicserélési tétel bizonyítása:

indirekt: van olyan $\underline{f_i}$, amihez nincs $\underline{g_j}$ → pl. $\underline{f_1}$-hez nincs

$\underline{g_1}$ rossz: $\underline{g_1}, \underline{f_2}, \underline{f_3}, \ldots, \underline{f_k}$ lin. öf. $\xRightarrow{\text{lemma}} \underline{g_1} \in \langle \underline{f_2}, \ldots, \underline{f_k} \rangle$

$\underline{g_2}$ rossz: $\underline{g_2}, \underline{f_2}, \underline{f_3}, \ldots, \underline{f_k}$ lin. öf. $\xRightarrow{\text{lemma}} \underline{g_2} \in \langle \underline{f_2}, \ldots, \underline{f_k} \rangle$

$\vdots$

$\underline{g_m}$ rossz: $\underline{g_m}, \underline{f_2}, \underline{f_3}, \ldots, \underline{f_k}$ lin. öf. $\xRightarrow{\text{lemma}} \underline{g_m} \in \langle \underline{f_2}, \ldots, \underline{f_k} \rangle$

} $\Longrightarrow V = \langle \underline{g_1}, \ldots, \underline{g_m} \rangle \subseteq \langle \underline{f_2}, \ldots, \underline{f_k} \rangle$

Mivel G gen. rsz. $\Longrightarrow \underline{f_1} \in \langle \underline{g_1}, \ldots, \underline{g_m} \rangle \subseteq \langle \underline{f_2}, \ldots, \underline{f_k} \rangle \Longrightarrow \underline{f_1} \in \langle \underline{f_2}, \ldots, \underline{f_k} \rangle \Longrightarrow F$ lin. öf. ↯

TÉTEL: V vektortér

$F = \underline{f_1}, \ldots, \underline{f_k}$ lin. ftlen. } $G = \underline{g_1}, \ldots, \underline{g_m}$ gen. rsz. $\Longrightarrow k \leq m$

biz.: $\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \xrightarrow[\underline{f_1}\text{-et}]{\text{kicserélem}} \begin{pmatrix} F' \\ G \end{pmatrix} \xrightarrow[\underline{f_2}\text{-t}]{\text{kicserélem}} \begin{pmatrix} F'' \\ G \end{pmatrix} \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{pmatrix} F^* \\ G \end{pmatrix}$. F^* elemszáma k; $F^* \subseteq G$ $\Longrightarrow k \leq m$ ✓

Következmény: $B = \{\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_n}\}$ bázis, $C = \{\underline{c_1}, \ldots, \underline{c_l}\}$ bázis } $\Longrightarrow n = l$

biz.: B lin. ftlen., C gen. rsz. $\Longrightarrow n \leq l$; B gen. rsz., C lin. ftlen. $\Longrightarrow l \leq n$ } $\Longrightarrow n = l$ ✓

Ha G gen. rsz. és $G \subseteq G'$ $\Longrightarrow$ G' is gen. rsz., ha F lin. ftlen. és $F' \subseteq F$ $\Longrightarrow$ F' is lin. ftlen.

Állítás: $\dim \mathbb{R}^n = n$

biz.:

$$\underline{b_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b_2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \underline{b_n} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \{\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_n}\}$$

Lássuk be, hogy B gen. rsz.:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \underline{b_1} + \ldots + \alpha_n \cdot \underline{b_n}$$ ✓

Lássuk be, hogy B lin. ftlen.: $\alpha_1 \underline{b_1} + \ldots + \alpha_n \underline{b_n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ ✓

4. TÉTEL

Gauss-elimináció

Egy k egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{írhatjuk}]{\text{az együtthatókat egy mátrixba}} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

← amit így kapunk, az egy kibővített együtthatómátrix

$$\left(\begin{array}{c|c} \sim & \wr \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} \sim & \wr \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots\ldots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ? \end{array}\right)$$

↖ főátló

addig kell átalakítani a mátrixot, amíg a jobboldali alakra nem hozzuk!
Ehhez először lépcsős alakra kell hozni a mátrixot, majd ezután redukált lépcsős alakra (RLA).

DEF.: Lépcsős alak: a mátrix minden sorában az első nemnulla elem 1 (vezéregyes), és bármely vezéregyesre igaz, hogy tetszőleges felette álló sorban van a vizsgált vezéregyestől balra vezéregyes.

DEF.: RLA: olyan lépcsős alak, aminek minden vezéregyesére igaz, hogy az adott vezéregyes az egyedüli nemnulla elem a saját oszlopában (vagyis a vezéregyesek felett is csak 0-k állhatnak).

Elemi sorekvivalens lépések:
(1) egy sor $\lambda \neq 0$-val végigszorzása
(2) i. sorhoz a j. sor λ-szorosának hozzáadása
(3) sorcsere
(4) $(00\cdots 0|0)$ csupa 0 sor elhagyása

I. fázis (lefelé söprés) ($\circ$ = „kurzor" az algoritmusban)

0. lépés: a_{11}

1. lépés: ha $a_{ij} \neq 0$:
- i. sor osztása a_{ij}-vel
- $\forall\, i<k$-ra: k-adik sorhoz hozzáadjuk az i. sor $(-a_{kj})$-szeresét
- ha $\left(\;\circ\;\middle\|\;\right)$ vagy $\left(\;\;\circ\middle\|\;\right)$ → 2. lépés
- $a_{i+1,j+1}$ → 1. lépés

ha $a_{ij} = 0$:
- ha $\exists\, k>i$, hogy $a_{kj} \neq 0 \Rightarrow$ k. és i. sort kicseréljük $\Rightarrow$ 1. lépés
- (ha $\nexists$) ha $\left(\;\;\circ\middle\|\;\right) \Rightarrow$ 2. lépés
- $a_{i,j+1} \Rightarrow$ 1. lépés

2. lépés:
- ha $\left(\;\circ\;\middle\|\;\right) \Rightarrow$ STOP
- ha $\left(\begin{array}{c|c} 00\cdots & \circ \\ 00\cdots & 0 \end{array}\right)$ → ha ezek a sorok mind $(00\ldots 0|0) \Rightarrow$ elhagyjuk $\Rightarrow$ STOP
  ha $\exists\,(00\ldots 0|\neq 0)$ tilos sor $\Rightarrow \nexists$ megoldás $\Rightarrow$ STOP

eredmény: lépcsős alak

II. fázis (felfelé söprés)

cél: vezéregyesek fölötti nemnulla elemek kinullázása
módszer: alulról felfelé haladva minden egyes sor vezéregyesénél az adott sor feletti sorokhoz hozzáadjuk az aktuális sor annyiszorosát, hogy az adott vezéregyes feletti együtthatók mind 0-k legyenek
eredmény: redukált lépcsős alak (RLA)

Példa:

lépcsős alak: $\begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & | & ? \\ 0 & 1 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & | & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ? & ? & ? & ? & ? & | & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ? & ? & | & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ? & | & ? \end{pmatrix}$

vezéregyesek

redukált lépcsős alak: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ? & 0 & ? & ? & 0 & 0 & ? & | & ? \\ 0 & 1 & ? & 0 & ? & ? & 0 & 0 & ? & | & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ? & ? & 0 & 0 & ? & | & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ? & | & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ? & | & ? \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 7 & 0 & 0 & 10 & | & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 11 & | & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 9 & 0 & 0 & 12 & | & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 & | & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 14 & | & 19 \end{pmatrix}$$

x_3, x_5, x_6, x_9 szabad paraméterek

$x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad x_1 = 15 - 10\delta - 7\gamma - 4\beta - 2\alpha$

$x_5 = \beta \in \mathbb{R}$ $\quad x_2 = 16 - 11\delta - 8\gamma - 5\beta - 3\alpha$

$x_6 = \gamma \in \mathbb{R}$ $\quad x_3 = \alpha$

$x_9 = \delta \in \mathbb{R}$ $\quad \vdots$

$x_8 = 19 - 14\delta$

$x_9 = \delta$

TÉTEL:

(1) $\forall$ lin. egy. rendsz. Gauss-eliminációval RLA-ra hozható

(2) nincs megoldás $\iff$ (1. fázisban) tilos sor keletkezett

(3) a mo. egyértelmű $\iff$ (nincs tilos sor és) $\forall$ oszlopban van vezéregyes (RLA-ban)

(4) ha több megoldás van, akkor a vezéregyest nem tartalmazó oszlopoknak megfelelő ismeretlenek szabad paraméterek és tetszőlegesen megválaszthatók, a többi ismeretlen pedig ezekkel egyértelműen kifejezhető.

TÉTEL: egy k egyenletből álló n ismeretlenes egy. rendsz.-nek egyértelmű a megoldása $\implies n \leq k$

biz.: egyértelmű megoldás esetén az RLA-ban a vezéregyesek száma n, másrészt a vezéregyesek különböző sorokban helyezkednek el, tehát számuk legfeljebb k. Innen valóban: $n \leq k$. ✓

5. TÉTEL

Bástyaelrendezés: $n\times n$-es sakktáblán helyezzünk el bástyákat úgy, hogy ne üssék egymást!
n db bástya elhelyezése $n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$-féleképp lehetséges. Minden bástyaelhelyezéshez az $1,2,\ldots,n$ számok egy permutációja tartozik (az i. helyen álló j szám azt jelenti, hogy a sakktáblán az i. sorban a j. oszlopba helyeztünk el egy bástyát).

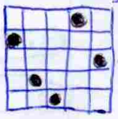
Két elem inverzióban áll egymással a $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n$ permutációban, ha nagyság szerint csökkenő sorrendben állnak.

DEF.: $\pi_1,\ldots,\pi_n$ permutáció inverziószáma az $1,2,\ldots,n$ közül kiválasztható, csökkenő sorrendben következő párok száma.

Jele: $I(\pi)$

Példa: $\pi:\ 4\ 1\ 5\ 2\ 3 \Rightarrow I(\pi)=5$

5×5



$\pi(1)=4$
$\pi(2)=1$
$\pi(3)=5$
$\pi(4)=2$
$\pi(5)=3$

DEF.: az $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ $n\times n$-es négyzetes mátrix determinánsán a következő szorzatösszeget értjük:

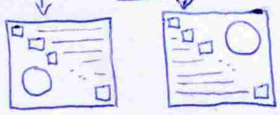
$$\underbrace{\det A = |A|}_{\text{jelölés}} = \sum_{\substack{\forall\pi\\ \text{permutáció}}} (-1)^{I(\pi)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}$$

Példa: $n=2$ $\quad \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad-bc$ $\quad 12 \to I=0$, $\ 21 \to I=1$

$n=3$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 8 & 9 & 10\end{vmatrix} = 2\cdot 6\cdot 10 - 2\cdot 7\cdot 9 - 3\cdot 5\cdot 10 + \ldots - \ldots + \ldots$

Tulajdonságok:

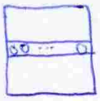
1. felső/alsó Δ mátrix $\Rightarrow \det = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$



2. Ha az egyik sort/oszlopot λ-val végigszorozzuk $\Rightarrow$ det is λ-szoros lesz

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & & & \vdots\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\quad A'=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \Rightarrow \det A' = \lambda\cdot\det A$$

3. egyik sor/oszlop csupa 0 $\Rightarrow \det = 0$



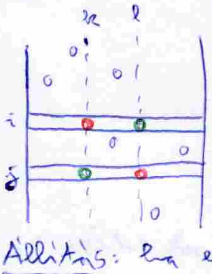
mind az $n!$ tag $=0$

4. det egyik sora/oszlopa $\forall$ tagja összeg $\Rightarrow$ det is összegre bontható

pl. első sora:
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

5. két sor egyenlő vagy két oszlop $\Rightarrow \det = 0$

példa: i. sor $=$ j. sor



$\pi \Rightarrow \pi_1\ \pi_2 \ldots k \ldots l \ldots \pi_n \to a_{1\pi_1}\ a_{2\pi_2} \ldots a_{ik} \ldots a_{jl} \ldots a_{n\pi_n}$

$\pi' \Rightarrow \pi_1\ \pi_2 \ldots l \ldots k \ldots \pi_n \to a_{1\pi_1}\ a_{2\pi_2} \ldots a_{il} \ldots a_{jk} \ldots a_{n\pi_n}$

Az $n!$ tag párba állítható úgy, hogy a párok abszolútértékben egyenlők és az előjelük ellentétes.

Állítás: ha egy permutációban két elemet felcserélünk $\Rightarrow$ az inverziószám páratlannal változik

biz.: I. eset: szomszédosak $\Rightarrow$ inv. szám ± 1-gyel változik

II. eset: általában (ha két távoli elemet akarunk felcserélni)

$\pi_1\pi_2 \ldots \pi_i \ldots \pi_j \ldots \pi_n$ } $+k$
$\pi_1\pi_2 \ldots \pi_{i+1} \ldots \pi_i\pi_j \ldots \pi_n$ } $+1$
$\pi_1\pi_2 \ldots \pi_{i+1} \ldots \pi_j\pi_i \ldots \pi_n$ } $+k$
$\pi_1\pi_2 \ldots \pi_j \ldots \pi_i \ldots \pi_n$

$\to$ összesen $2k+1$ szomszéd csere ✓

⑥ i. sor += λ · j. sor
i. oszlop += λ · j. oszlop } ⟹ det nem változik

biz.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \cdots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{}}$$

det = 0, mert két sor megegyezik!

⑦ sorcsere vagy oszlopcsere ⟹ det (−1)-szeres lesz

biz.:

$$\underset{+}{\begin{vmatrix} i \\ j \end{vmatrix}} \to \underset{+}{\begin{vmatrix} i+j \\ j \end{vmatrix}} \to \underset{-}{\begin{vmatrix} i+j \\ -j \end{vmatrix}} \to \underset{-}{\begin{vmatrix} i+j \\ i \end{vmatrix}} \to \underset{+}{\begin{vmatrix} i+j \\ -i \end{vmatrix}} \to \underset{+}{\begin{vmatrix} j \\ -i \end{vmatrix}} \to \underset{-}{\begin{vmatrix} j \\ i \end{vmatrix}}$$

Determináns kiszámítása Gauss-eliminációval:

(1) sor *= λ (λ≠0) ⟷ ② ⟹ det λ-szoros : λ
(2) egyik sor += λ · másik sor ⟷ ⑥ ⟹ det nem vált. : =
(3) sorcsere ⟷ ⑦ ⟹ det (−1)-szeres : (−1)
(4) (0…0|0) elhagyása ⟷ ③ ⟹ det = 0 : 0

TÉTEL: A $n \times n$-es mátrix
(A|b) lin. egy. rdsz. egyértelműen megoldható ⟺ det A ≠ 0

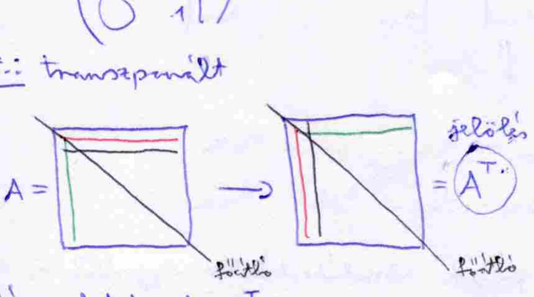
biz.: Gauss-elimináció (sorokon) lépései — lin. egy. rdsz. megoldásait nem változtatja
— det „nullaságát" nem változtatja

(1) $\left(\begin{array}{c|c} & \\ 0\,0 \ldots 0 & \neq 0 \end{array}\right)$ ⟹ ∄ mo. és det = 0

(2) $\left(\begin{array}{c|c} & \\ 0\,0 \ldots 0 & 0 \end{array}\right)$ ⟹ lesz szabad paraméter ⟹ ∞ sok mo. és det = 0

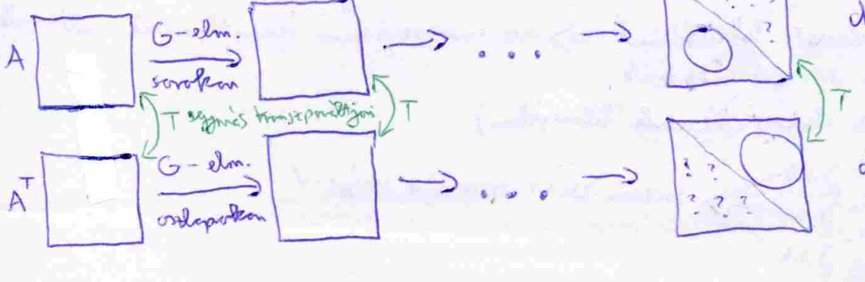
(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & ? \\ 0 & & 1 & \end{array}\right)$ ⟹ egyértelmű mo. és det ≠ 0

DEF.: transzponált



állítás: det A = det A^T

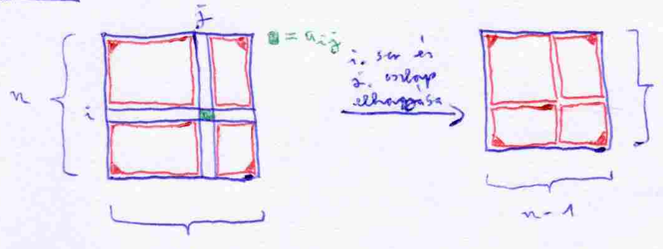
biz.:



mert ezen determinánsok értéke a főátlóbeli elemek szorzata
⇓
det A = det A^T ✓

6. TÉTEL

DEF.: előjeles aldetermináns



$A_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{„sakktáblaszabály"}} \cdot \det \boxed{}\ \}\, n-1$

„sakktáblaszabály":

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	+	−	+	−
2	−	+	−	+
3	+	−	+	−
4	−	+	−	+

KIFEJTÉSI TÉTEL: i. sorra: $\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$

j. oszlopra: $\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$

Példa: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} \right) + 6 \cdot \left(+ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} \right) + 9 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \right)$

$(-1)^{1+2} = -1 \qquad (-1)^{2+2} = +1 \qquad (-1)^{3+2} = -1$

biz.: az n-tényezős szorzatokat csoportosítsuk úgy, hogy az i. sorból melyik elem szerepel bennük:

$D = a_{i1}\beta_1 + \ldots + a_{in}\beta_n \rightarrow$ Megmutatjuk, hogy bármely j-re $\beta_j = A_{ij}$. $\quad (A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D')$

Tekintsük D-ben az a_{ij}-t tartalmazó szorzatoknak egy olyan felírását, amikor a_{ij} áll elöl!

$\underbrace{a_{ij}\, a_{S(2)\pi(2)} \cdots a_{S(n)\pi(n)}}$ ahol S a sor-, π az oszlopindexeknek megfelelő permutáció $(S(1) = i,\ \pi(1) = j)$.

Ennek a szorzatnak az előjele: $(-1)^{I(S) + I(\pi)}$, vagyis $\beta_j = \sum (-1)^{I(S)+I(\pi)} a_{S(2)\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{S(n)\pi(n)}$

Ezt az összeget összehasonlítva a D' determinánst definíció szerint előállító összeggel, látható, hogy mindkét összegben ugyanazokról az $n-1$-tényezős szorzatokról van szó.

Most vizsgáljuk meg, milyen előjellel kellene venni D' kiszámításához!

Az inverziókat nem befolyásolja, ha megtartjuk az eredeti D-beli sor- és oszlopszámokat:

sorokra: $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n \implies$ legyen S' ezeknek a számoknak a sorindexek szerinti permutációja

oszlopokra: $1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n \implies$ legyen π' — " — az oszlopindexek — " —

Ennek megfelelően $I(S')$-t, ill. $I(\pi')$-t kell venni.

S permutációt előállíthatjuk S'-ből, ha $S(1) = i$. Ekkor $I(S)$ annyival nagyobb $I(S')$-nél, ahány elemmel $S(1) = i$ inverzióban áll. Ezek az elemek nyilván éppen i-nél kisebb számok.

$\implies I(S) = I(S') + i - 1$ hasonlóan: $I(\pi) = I(\pi') + j - 1 \implies I(S) + I(\pi) = i + j - 2 + I(S') + I(\pi')$

$\beta_j = (-1)^{i+j-2} \sum (-1)^{I(S') + I(\pi')} a_{S(2)\pi(2)}\, a_{S(3)\pi(3)} \cdot \ldots \cdot a_{S(n)\pi(n)} = (-1)^{i+j} \cdot D' = A_{ij}$ ✓

DEF.: k, n adott poz. egészek; $k \times n$-es mátrixon egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, melynek k sora és n oszlopa van és melynek elemei $\mathbb{R}$-ből valók.

a ($\mathbb{R}$ feletti) $k \times n$-es mátrixon egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, melynek

$\underset{\substack{\uparrow \\ k \times n\text{-es}}}{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} & \vdots^{\,j} & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \;i \\ & \vdots & \end{pmatrix}}_{n} \Big\}\, k \qquad \mathbb{R}^{k \times n} = \{ k \times n\text{-es mátrixok halmaza } (\mathbb{R} \text{ felett}) \}$

DEF.: (összeadás, szorzás művelet (skalárral)) $\quad A, B \in \mathbb{R}^{k \times n}$

$\underset{A}{\begin{pmatrix} & \vdots^{\,j} & \\ i \cdots & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}} + \underset{B}{\begin{pmatrix} & \vdots^{\,j} & \\ i \cdots & b_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}} = \underset{(A+B)}{\begin{pmatrix} & \vdots^{\,j} & \\ i \cdots & (a_{ij} + b_{ij}) & \\ & & \end{pmatrix}}$

tulajdonságok: $(\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{k \times n}$-re$)$

- asszociatív: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- kommutatív: $A + B = B + A$
- $\exists \underline{0}$: $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$
- $\forall A$-hoz $\exists (-A)$: $A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$

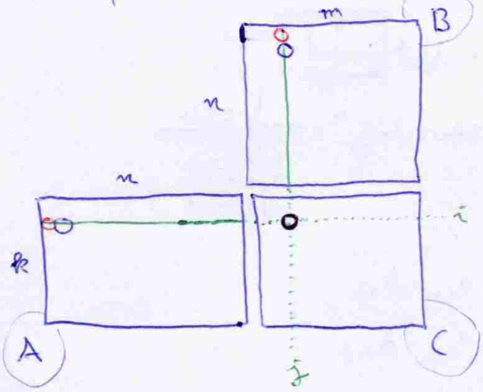
$\underset{\substack{\mathbb{R} \\ \Downarrow}}{\lambda} \cdot A = \begin{pmatrix} & \vdots^{\,j} & \\ i \cdots & (\lambda \cdot a_{ij}) & \\ & \vdots & \end{pmatrix}$

tulajdonságok: $(\forall A, B \in \mathbb{R}^{k \times n};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

- $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha \beta) A = \alpha (\beta A)$
- $1 \cdot A = A$

DEF.: (mátrixok szorzása)

$A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jelölés: $A\cdot B$



$C = A\cdot B \in \mathbb{R}^{k\times m}$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{x=1}^{n} a_{ix}b_{xj}$$

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & \\ -19 & \end{pmatrix} \end{array}$$

$10 = 1\cdot 1 + (-2)\cdot 3 + 3\cdot 5$

$-19 = (-4)\cdot 1 + 5\cdot 3 + (-6)\cdot 5$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Leftarrow \text{zérus mátrix}$$

tulajdonságok:

- $A\cdot B \neq B\cdot A$ nem kommutatív
- $A\cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ vagy $B = 0$ $\xrightarrow{\text{példa}}$
- $(AB)C = A(BC)$
- $(A+B)C = AC + BC$, $C(A+B) = CA + CB$
- $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

TÉTEL: (determinánsok szorzástétele)

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\det(A\cdot B) = \det A\cdot \det B$ (de $\det(A+B) \neq \det A + \det B$!)

7. TÉTEL

DEF.: egységmátrix $\quad E=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}\Big\}n \quad \det E = 1$ (the matrix is n wide)

DEF.: az A $n\times n$-es mx.-nak X ($n\times n$-es mx.) inverze, ha $A\cdot X = X\cdot A = E$ $\quad$ jele: A^{-1}

állítás: $A\cdot E = A$, $E\cdot B = B$

Nem minden mátrixnak van inverze! Pl. a csupa 0 mx.-nak nincs.

TÉTEL: $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\exists A^{-1} \iff \det A\neq 0$

biz.: $\Rightarrow$ irány: $A\cdot A^{-1}=E \Rightarrow \det(A\cdot A^{-1})=\det E = 1 \Rightarrow \det A\cdot \det A^{-1}=1 \Rightarrow$ $\det A$ nem lehet 0 ✓

$\Leftarrow$ irány: $A\cdot X = E \quad \begin{pmatrix} x_1 | x_2 | \dots | x_n\end{pmatrix}=X$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}=E \Rightarrow \quad Ax_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ Ax_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\ Ax_n=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

Mivel $\det A\neq 0 \Rightarrow$ ezek a lin. egy. rszr.-ek fent egyértelműen megoldhatók

$\Downarrow$

$\exists$ egyértelmű $x_1, x_2, \dots, x_n$ ✓

$Y\cdot A = E$

$$Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}=E \Rightarrow \quad \begin{matrix} y_1\cdot A = (1\,0\,0\,\dots\,0)\\ y_2\cdot A=(0\,1\,0\,\dots\,0)\\ \vdots \\ y_n\cdot A = (0\,0\,\dots\,0\,1)\end{matrix}$$

ezekben a lin. egy. rszr.-ekben az együttható mx. $= A^T$, de $\det A^T = \det A \neq 0$

$\Downarrow$

$\exists$ egyértelmű $y_1, y_2, \dots, y_n$ ✓

Kérdés: $X \stackrel{?}{=} Y$

$$X = E\cdot X = \overbrace{(Y\cdot A)}^{E}\cdot X = Y\cdot \overbrace{(A\cdot X)}^{E} = Y\cdot E = Y \quad ✓$$

A^{-1} számítása:

$$Ax_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ Ax_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\ Ax_n=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}\Bigg\}\ n \text{ db lin. egy. rszr.}$$

$$\left(A\ \middle|\ \begin{matrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{matrix}\right)\sim\sim\dots\sim\left(\begin{matrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{matrix}\ \middle|\ \boxed{x_1 | x_2 | \dots | x_n}\right) \leftarrow A^{-1}$$

$$(A|E)\underbrace{\sim\dots\sim\dots}_{\text{Gauss-elim. a sorokon!}}\sim(E|A^{-1})$$

Mátrix rangja

DEF.: az A mx. $\left|\begin{matrix}\text{sorrangja}\\ \text{oszloprangja}\end{matrix}\right|$ r, ha A $\left|\begin{matrix}\text{sorai}\\ \text{oszlopai}\end{matrix}\right|$ közül kiválasztható r db lin. ftl., de r-nél több nem

jelölés: oszloprang: $o(A)$, sorrang: $s(A)$

Példa:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7 & 10\\ 2 & 5 & 8 & 11\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow \text{lin. ftl.} \longrightarrow s(A)=2\\ \leftarrow \\ s_3 = 2s_2 - s_1\end{matrix}$$

lin. ftl., $o_3 = 2o_2 - o_1$, $o_4 = 3o_2 - 2o_1 \Rightarrow o(A)=2$

DEF.: A-ból kiválasztunk k db sort és k db oszlopot, akkor az ezek kereszteződésében kialakuló $k\times k$-s mátrix determinánsa az A egy $k\times k$-s aldeterminánsa.

DEF.: az A determinánsrangja r, ha van $r\times r$-es $\neq 0$ aldeterminánsa, de annál nagyobb nem (ha egyáltalán $\exists$)

Példa:

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 7 & 10\\ 2 & 5 & 8 & 11\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}\quad \begin{vmatrix}1 & 7\\ 3 & 9\end{vmatrix} = 9-21\neq 0 \quad d(A)=2$$

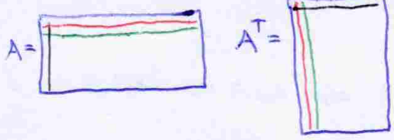
Állítás: tetszőleges A mátrixra: $d(A) = d(A^T)$

biz.: mivel négyzetes mx. determinánsa megegyezik a transzponáltjának determinánsával, ezért az A-beli legnagyobb nemnulla aldetermináns az A^T-beli legnagyobb nemnulla aldetermináns transzponáltja lesz.

TÉTEL: tetszőleges A mátrixra: $o(A) = s(A) = d(A)$

biz.: elég belátni: $o(A) = d(A)$ $\xrightarrow{\text{mert}}$ $s(A) = \boxed{o(A^T) = d(A^T)} = \boxed{d(A) = o(A)}$

már csak ezeket kell belátni, a többi magától értetődő



Gauss-elim. mátrixon: (1) $\lambda \cdot$ ____ $\lambda \neq 0$
(2) ____ $+ \lambda \cdot$ ____
(3) ____ $\leftrightarrow$ ____
(4) $(0\,0 \ldots 0)$ elhagyása

A bizonyítás a következő lépésekből fog állni:
I. G-elim. (sorokon) nem változtatja $o(A)$-t
II. G-elim. (sorokon) — " — $d(A)$-t
III. RLA mx.-nál $o(A) = d(A)$

I. Az oszloprangához bizonyos oszlopok lin. figg.-ségét kell vizsgálni. Ez olyan homogén lin. egy. rszr.-t jelent, amelynek együtthatómátrixa az eredeti mátrixnak a kérdéses oszlopaiból álló részmátrixa. Ennek a hom. lin. egy. rszr.-nek a nemtriviális megoldásait az elemi sorekvivalens átalakítások nem változtatják, tehát az oszloprang is változatlan marad.

II. $d(A)$ változatlansága...

III. RLA-ban vezéregyesek száma legyen r. Mivel RLA-ban a „csupa 0" sorok törölhetők, így r sor van, így sem $o(A)$, sem $d(A)$ nem lehet r-nél nagyobb. Ugyanakkor a vezér1eseket tartalmazó oszlopok az $r \times r$-es E-t alkotják $\Rightarrow$ lin. ftlt.-ek, továbbá az ebből képzett aldetermináns $1 \neq 0 \Rightarrow o(A) = d(A) = r$

Ezért egy mátrix rangját egyszerűen $r(A)$-val jelöljük.

Rang számítása: Gauss-elim., majd az RLA-ban a vezéregyesek száma
↳ sor/oszlop

$d(A)$ változatlanságának bizonyítása utólag: Külön fogjuk vizsgálni mind a 4 elemi sorekvivalens átalakítást:

(1) Ha az A mátrix tetszőleges sorát beszorozzuk egy nemnulla skalárral, akkor A-nak bármely aldeterminánsára igaz, hogy nem változtatja meg annak „nullaságát". Ha egy ald. 0 volt, λ-val szorozva is az marad, ha $\neq 0$ volt, akkor utána is $\neq 0$ marad, mert λ is $\neq 0$.

(2) Egyik sorhoz hozzáadjuk valamely másik skalárszorosát. Elég belátnunk, hogy a determinánsrang nem nő. Ugyanis az átalakítást ugyanezen skalárszoros kivonásával visszacsinálhatjuk, és ha a determinánsrang a két lépés egyikében sem nőtt, akkor mindkét lépésben csak egyenlőség állhat fenn, hiszen végül az eredeti mátrixhoz jutottunk vissza. Tegyük fel pl., hogy A 3. sorához az 1. sor λ-szorosát adtuk hozzá, és jelöljük az így kapott mátrixot B-vel. A $d(B) \stackrel{?}{=} d(A)$ egyenlőtlenséghez azt kell megmutatnunk, hogy ha A-ban $\forall$ $k \times k$-as aldetermináns 0, akkor ugyanez B-ben is teljesül. Vegyünk B-ben egy tetsz. k-adrendű ald.-t: D. Ha D-ben nem szerepel a B mx. 3. sora, akkor D egyben A-nak is ald.-a $\Rightarrow 0$. Ha D-ben B 1. és 3. sora is szerepel, akkor az utóbbiból az előbbi λ-szorosát levonva D nem vált. $\Rightarrow 0$. Végül a 3. utolsó eset: D-ben B 3. sora szerepel, de 1. sor nem. Álljon D mondjuk B első k oszlopából és $2., 3., \ldots, k+1.$ sorából:

$$D = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ (a_{31}+\lambda a_{11}) & \cdots & (a_{3k}+\lambda a_{1k}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} \end{vmatrix} = D_1 + \lambda \cdot D_2$$

Itt D_1 az A mx. egy k-adrendű ald.-a, tehát 0, D_2 pedig (esetleges) sorcserékkel átalakítható át egy ilyen aldeterminánssá, ezért szintén 0. ✓

(3) Legyen A' egy olyan mx., amit úgy kapunk A-ból, hogy annak két sorát felcseréljük: i.-t és j.-t. Ha 2 sort úgy cserélek meg, hogy egy ald. mindkét sorát érinti, akkor ennek az ald.-nak, mint négyzetes mx.-nak cserélem fel 2 sorát, ami nem változtatja annak 0ságát. Ha a sorcsere egy $\neq 0$ ald.-nak csak 1 sorát változtatja, pl. i-t j-re, akkor tekintsük azt az ald.-t, amit az előzőből úgy kapunk, hogy i. sort j.-re cserélem, így ez is $\neq 0$. Ha a sorcsere egy C 0 ald.-nak változtatja csak 1 sorát $\rightarrow C'$, pl. i-t j-re, akkor $\det C'$ is 0, mert az eredeti A mx.-ban is van ezzel ekvivalens D ald., amiben i. sor helyett j. van, de ekv. sorcserékkel D megkapható.

(4) Ha A-ban van $\neq 0$ ald., akkor ez a csupa0 sor elhagyása után is megmarad, mert egy $\neq 0$ ald. nem tartalmazhat csupa0 sort. A 0 ald.-okról meg azt lehet elmondani, hogy amik nem tartalmazták ezt a csupa0 sort, azokra ez nincs hatással, amik meg igen, azok eltűnődnek, de az nem baj.

8. TÉTEL

TÉTEL: A egy $n \times n$-es mx.

$(A|\underline{b})$ lin. egy. rszr. egyért. megoldható $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

biz.: Gauss-elimináció (sorokban) lépései:
- lin. egy. rszr. megoldásainak halmazát nem változtatja
- determináns „nullaságát" nem változtatja

Három eset lehetséges:

(1)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ \text{tilos sor} & & & \\ 0\ 0 & \dots & 0 & \neq 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \nexists \text{ mo. és } \det A = 0$$

(2)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ \text{csupa 0 sor} & & & \\ 0\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{lesz szabad paraméter és } \det = 0$$

(3)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \underline{x} \\ 0 & & & 1 & \end{array}\right) \Longrightarrow \text{egyértelmű mo. és } \det \neq 0$$

TÉTEL: $A\underline{x} = \underline{b}$ lin. egy. rszr. megoldható $\Longleftrightarrow$ $\overbrace{r(A)}^{r} = r(A|\underline{b})$

biz.: $\Longleftrightarrow$ $\underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle$ ahol $A = \left(\underline{a}_1 \middle| \underline{a}_2 \middle| \dots \middle| \underline{a}_n\right)$

$\Longleftarrow$ irány: A-ban r db. lin. fgtl. oszlop: $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$

$r(A|\underline{b}) = r \Longrightarrow \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r, \underline{b}$ lin. öf. $\Longrightarrow \underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r \rangle \Longrightarrow \underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$

$\Longrightarrow$ irány: $\underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$ ezt tudjuk $\Longrightarrow \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b} \rangle$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\dim \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle}_{r(A)} = \underbrace{\dim \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b} \rangle}_{r(A|\underline{b})}$$

ez az összefüggés a következő tétel miatt igaz:

TÉTEL:

$$A = \left.\left(\underline{a}_1 \middle| \underline{a}_2 \middle| \dots \middle| \underline{a}_n\right)\right\} m$$

$$\underbrace{r(A)}_{r} = \dim \underbrace{\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle}_{W \leq \mathbb{R}^m}$$

biz.: A oszloprangja $r \Longrightarrow$ A oszlopai közül kiválasztható r fgtl., de több nem: $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ lin. fgtl.

$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r, \underline{a}_i$ lin. öf.
$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ lin. fgtl. $\Longrightarrow$ régi lemma miatt: $a_i \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r \rangle$ vagyis $\underline{a}_i$ benne van a többi vektor által generált altérben

$$\Downarrow$$

$W = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r \rangle$

W-ben $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ $\left.\begin{array}{l}\text{gen. rszr.} \\ \text{lin. fgtl.}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ bázis! $\Longrightarrow \dim W = r$ ✓

TÉTEL: ha $A\underline{x} = \underline{b}$ lin. egy. rszr. megoldható, akkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha a rang megegyezik az ismeretlenek számával.

biz.: a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\underline{b}$ egyértelműen állítható elő $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ oszlopvektorok lin. kombinációjaként $\Longleftrightarrow$ ezen $\underline{a}_i$ vektorok lin. fgtl.-ek, azaz az A mx. rangja megegyezik az oszlopok, vagyis az ismeretlenek számával.

TÉTEL: (Cramer-szabály)
ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\det A = D \neq 0$, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ lin. egy. rsz.-nek pontosan egy megoldása van és a megoldásban $x_j = \frac{D_j}{D}$, ahol D_j determinánst úgy kapjuk, hogy D-ben a j. oszlop helyére a jobb oldali konstansokat (vagyis a $\underline{b}$ vektor komponenseit) írjuk.

Pl.:

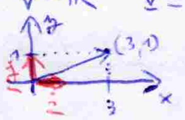
$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \beta_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \beta_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$$

9. TÉTEL

DEF.: V vektortér, $B=\{\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n\}$ bázis, $\underline{v}=\alpha_1\underline{b}_1+\dots+\alpha_n\underline{b}_n$

$$[\underline{v}]=\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}}_{}$$ } $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora

Példa: $V=\mathbb{R}^2$ $\quad \underline{v}=(3,1)$



$B=\{\underline{i},\underline{j}\}$ $\quad B=\{(1,1),(1,-1)\}$

$[\underline{v}]_B=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\quad [\underline{v}]_B=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ mert $(3,1)=2\cdot(1,1)+1\cdot(1,-1)$

Állítás: $[\underline{v}+\underline{w}]_B=[\underline{v}]_B+[\underline{w}]_B$; $[\lambda\underline{v}]_B=\lambda\cdot[\underline{v}]_B$

biz.:

$[\underline{v}]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ $\quad [\underline{w}]_B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix}\underline{v}=\alpha_1\underline{b}_1+\dots+\alpha_n\underline{b}_n\\ \underline{w}=\beta_1\underline{b}_1+\dots+\beta_n\underline{b}_n\end{matrix} \Rightarrow \underline{v}+\underline{w}=(\alpha_1+\beta_1)\underline{b}_1+\dots+(\alpha_n+\beta_n)\underline{b}_n$

$$\Downarrow$$

$$[\underline{v}+\underline{w}]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix} \checkmark$$

$$\lambda\cdot\underline{v}=(\lambda\alpha_1)\underline{b}_1+\dots+(\lambda\alpha_n)\underline{b}_n \Rightarrow [\lambda\underline{v}]_B=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\alpha_2\\ \vdots\\ \lambda\alpha_n\end{pmatrix} \checkmark$$

DEF.: V,W vektorterek

$\mathcal{A}: V\to W$ függvény **lineáris leképezés**, ha (i) $\forall \underline{v},\underline{w}\in V$ $\mathcal{A}(\underline{v}+\underline{w})=\mathcal{A}(\underline{v})+\mathcal{A}(\underline{w})$

(ii) $\forall\underline{v}\in V, \forall\lambda\in\mathbb{R}$ $\mathcal{A}(\lambda\underline{v})=\lambda\cdot\mathcal{A}(\underline{v})$

Ha $V=W$ akkor $\mathcal{A}$ lin. transzformáció.

Példa: $V=W=\mathbb{R}^2$ $\quad$ ellenőrzés: (i) $2\cdot(\underline{v}+\underline{w})=2\cdot\underline{v}+2\cdot\underline{w}$ ✓

$\underline{v}\xrightarrow{\mathcal{A}}2\cdot\underline{v}$ $\quad$ (ii) $2\cdot(\lambda\cdot\underline{v})=\lambda\cdot(2\cdot\underline{v})$ ✓

Ellenpélda: $V=W=\mathbb{R}^2$, $\underline{v}\xrightarrow{\mathcal{A}}\underline{v}+(1,1)$ } Ez nem lin. leképezés!

$$\underbrace{\mathcal{A}(\underbrace{\lambda\underline{v}}_{(\lambda x,\lambda y)})}_{(\lambda x+1,\lambda y+1)} = \underbrace{\lambda\cdot\mathcal{A}(\underbrace{\underline{v}}_{(x+1,y+1)})}_{(\lambda x+\lambda,\lambda y+\lambda)}$$

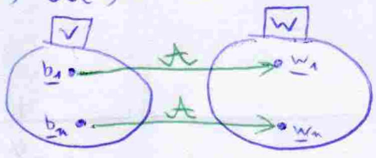
$(\lambda x+1,\lambda y+1)\neq(\lambda x+\lambda,\lambda y+\lambda)$

Tulajdonságok: (1) $\mathcal{A}(\underline{0})=\underline{0}$ mert $\underbrace{\mathcal{A}(\overset{\underline{0}}{2\cdot\underline{0}})}_{\mathcal{A}(\underline{0})}\overset{(ii)}{=}2\cdot\mathcal{A}(\underline{0}) \Rightarrow \mathcal{A}(\underline{0})=\underline{0}$ ✓

(2) $\mathcal{A}(-\underline{v})=-\mathcal{A}(\underline{v})$ mert $\mathcal{A}(-\underline{v})=\mathcal{A}((-1)\cdot\underline{v})=(-1)\cdot\mathcal{A}(\underline{v})=-\mathcal{A}(\underline{v})$ ✓

TÉTEL: V-ben $B=\{\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n\}$ bázis, $\mathcal{A}: V\to W$ lin. leképezés

Ha $\underline{w}_1=\mathcal{A}(\underline{b}_1),\dots,\underline{w}_n=\mathcal{A}(\underline{b}_n)$ ismert, akkor tetszőleges $\underline{v}\in V$ $\mathcal{A}(\underline{v})$ egyértelműen meghatározható.



biz.: $\underline{v}=\alpha_1\underline{b}_1+\dots+\alpha_n\underline{b}_n$

$\mathcal{A}(\underline{v})=\mathcal{A}(\alpha_1\underline{b}_1+\dots+\alpha_n\underline{b}_n)=\mathcal{A}(\alpha_1\underline{b}_1)+\dots+\mathcal{A}(\alpha_n\underline{b}_n)=\alpha_1\cdot\mathcal{A}(\underline{b}_1)+\dots+\alpha_n\cdot\mathcal{A}(\underline{b}_n)=\alpha_1\underline{w}_1+\dots+\alpha_n\underline{w}_n$ ✓

DEF.: $\mathcal{A}: V\to W$ lin. lek., $B=\{\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n\}$ bázis V-ben, $C=\{\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_m\}$ bázis W-ben

Az $\mathcal{A}$ B és C szerinti mátrixa az az $m\times n$-es mx., aminek az i. $(1\le i\le n)$ oszlopa: $[\mathcal{A}(\underline{b}_i)]_C$

jele: $[\mathcal{A}]_{B,C}$

Példa: $V=W=\mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{A}:(x,y)\mapsto(x,0)$ $\quad B=C=\{\overset{\underline{i}}{\overbrace{(1,0)}},\overset{\underline{j}}{\overbrace{(0,1)}}\}$

$$[\mathcal{A}]_{B,C}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\\ \mathcal{A}(\underline{i})\ \mathcal{A}(\underline{j})\end{array} \qquad \begin{matrix}\mathcal{A}(\underline{i})=(1,0)=1\cdot\underline{i}+0\cdot\underline{j}\\ \mathcal{A}(\underline{j})=(0,0)=0\cdot\underline{i}+0\cdot\underline{j}\end{matrix}$$

TÉTEL: $\mathcal{A}: V\to W$ lin. lek., B bázis V-ben, C bázis W-ben

$$[\mathcal{A}(\underline{v})]_C=[\mathcal{A}]_{B,C}\cdot[\underline{v}]_B$$

biz.:

$$[\mathcal{A}]_{B,C}=\left(\underline{a}_1\,\middle|\,\underline{a}_2\,\middle|\,\dots\,\middle|\,\underline{a}_n\right) \qquad [\underline{v}]=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\left(\underline{a}_1\,\middle|\,\underline{a}_2\,\middle|\,\dots\,\middle|\,\underline{a}_n\right)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\underline{a}_1+\lambda_2\underline{a}_2+\dots+\lambda_n\underline{a}_n=[\mathcal{A}]_{B,C}\cdot[\underline{v}]_B$$

$\underline{v} = \lambda_1 \underline{b_1} + \lambda_2 \underline{b_2} + \dots + \lambda_n \underline{b_n} \Rightarrow \mathcal{A}(\underline{v}) = \mathcal{A}(\lambda_1 \underline{b_1} + \dots + \lambda_n \underline{b_n}) = \lambda_1 \cdot \mathcal{A}(\underline{b_1}) + \dots + \lambda_n \cdot \mathcal{A}(\underline{b_n})$

$[\mathcal{A}(\underline{v})]_C = [\lambda_1 \mathcal{A}(\underline{b_1}) + \dots + \lambda_n \mathcal{A}(\underline{b_n})]_C = [\lambda_1 \mathcal{A}(\underline{b_1})]_C + \dots + [\lambda_n \mathcal{A}(\underline{b_n})]_C = \lambda_1 \cdot [\mathcal{A}(\underline{b_1})]_C + \dots + \lambda_n \cdot [\mathcal{A}(\underline{b_n})]_C =$

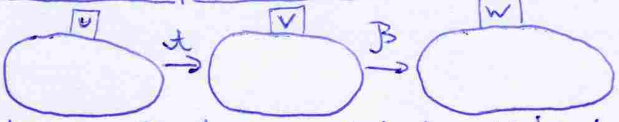
$= \lambda_1 \underline{o_1} + \dots + \lambda_n \underline{o_n} = [\mathcal{A}(\underline{v})]_C$ előző oldalról: $[\mathcal{A}]_{B,C} \cdot [\underline{v}]_B = \lambda_1 \underline{o_1} + \dots + \lambda_n \underline{o_n}$

egyenlőek ✓

Lineáris leképezések szorzata

DEF.: $\mathcal{A}: U \to V$, $\mathcal{B}: V \to W$ lin. leképezések

$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\underline{u}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u}))$ ahol $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}: U \to W$ leképezés

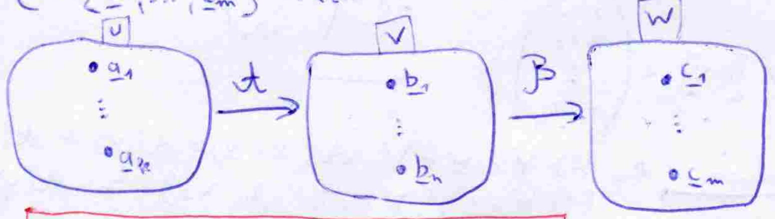


Állítás: $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}: U \to W$ lineáris leképezés

biz.: $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\underline{u} + \underline{v}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u} + \underline{v})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u}) + \mathcal{A}(\underline{v})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u})) + \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{v})) = (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})\underline{u} + (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})\underline{v}$ ✓

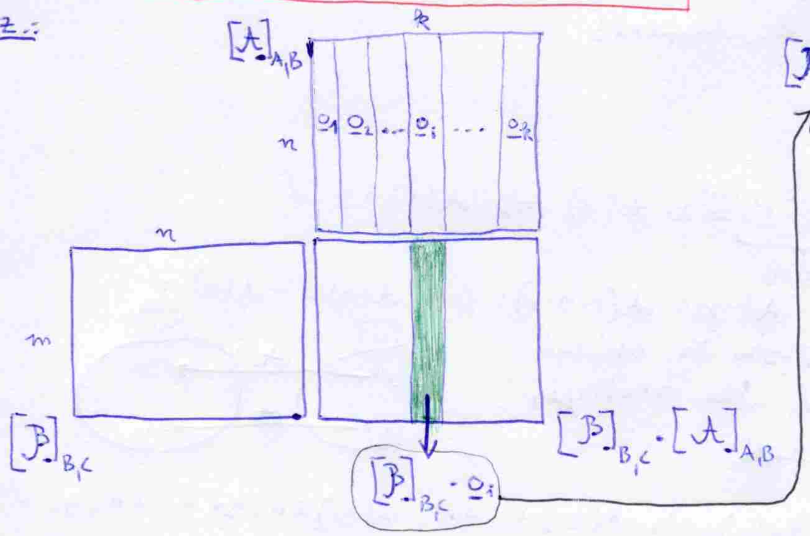
hasonlóan: $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\lambda \underline{u}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\lambda \underline{u})) = \mathcal{B}(\lambda \cdot \mathcal{A}(\underline{u})) = \lambda \cdot \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u})) = \lambda \cdot (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})\underline{u}$ ✓

TÉTEL: $A = \{\underline{a_1}, \dots, \underline{a_k}\}$ bázis U-ban, $\mathcal{A}: U \to V$
$B = \{\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}\}$ bázis V-ben, $\mathcal{B}: V \to W$ } lin. leképezések
$C = \{\underline{c_1}, \dots, \underline{c_m}\}$ bázis W-ben



$$\boxed{[\mathcal{B} \circ \mathcal{A}]_{A,C} = [\mathcal{B}]_{B,C} \cdot [\mathcal{A}]_{A,B}}$$

biz.:



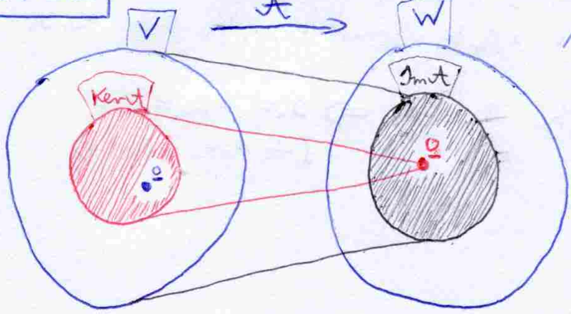
$$[\mathcal{B}]_{B,C} \cdot \underline{o_i} = [\mathcal{B}]_{B,C} \cdot [\mathcal{A}(\underline{a_i})]_B \overset{\text{előző tétel}}{=} [\mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{a_i}))]_C =$$

$$= \underbrace{[(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\underline{a_i})]_C}$$

Ez pont a $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ lin. leképezés A, C szerinti mátrixának i. oszlopa ✓

10. TÉTEL

DEF.:



/$\mathcal{A}: V \to W$ lin. lek./

Képtér: $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{ \underline{w} \in W : \exists \underline{v} \in V,\ \mathcal{A}(\underline{v}) = \underline{w} \}$

magtér: $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{ \underline{v} \in V : \mathcal{A}(\underline{v}) = \underline{0} \}$

Példa: (1) $V = W = \mathbb{R}^2$ $\quad \underline{v} \xrightarrow{\mathcal{A}} 2\underline{v} \Rightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathbb{R}^2,\ \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\underline{0}\}$

(2) $V = W = \mathbb{R}^2$ $\quad (x, y) \xrightarrow{\mathcal{A}} (x, 0) \Rightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ → az x-tengely vektorai

$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ → az y-tengely vektorai

TÉTEL: (1) $\operatorname{Im}\mathcal{A} \le W$

(2) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \le V$

biz.: ahhoz, hogy belássuk, ezek valóban alterek, elég azt belátni ezekre a halmazokra, hogy:
- $\neq \emptyset$
- műveletzártak $(+, \cdot)$

(1) (i) $\underline{w}_1 = \mathcal{A}(\underline{v}_1) \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$ $\quad \underline{w}_2 = \mathcal{A}(\underline{v}_2) \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = \mathcal{A}(\underline{v}_1) + \mathcal{A}(\underline{v}_2) = \mathcal{A}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$ ✓

(ii) $\underline{w} = \mathcal{A}(\underline{v}) \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$ $\quad \lambda \cdot \underline{w} = \lambda \cdot \mathcal{A}(\underline{v}) = \mathcal{A}(\lambda \cdot \underline{v}) \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$ ✓

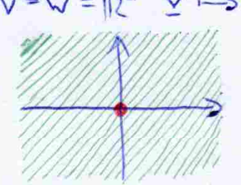
(2) (i) $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(\underline{v}_1) = \mathcal{A}(\underline{v}_2) = \underline{0},\ \mathcal{A}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \mathcal{A}(\underline{v}_1) + \mathcal{A}(\underline{v}_2) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ ✓ $\Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$

(ii) $\underline{v} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(\underline{v}) = \underline{0},\ \mathcal{A}(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot \mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$ ✓ $\Rightarrow \lambda \cdot \underline{v} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$

V-ben $\exists \underline{0}$: $\mathcal{A}(\underline{0}) = \underline{0} \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \Rightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} \neq \emptyset$ ✓

↳ $\underline{0} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Rightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A} \neq \emptyset$ ✓

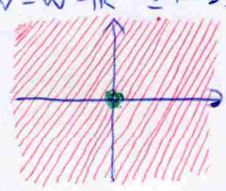
Példák: $V = W = \mathbb{R}^2$ $\quad \underline{v} \xrightarrow{\mathcal{A}} 2\underline{v}$ $\quad \dim V = 2$



$\dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0$

$\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = 2$

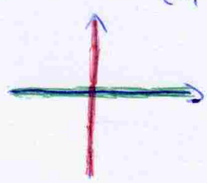
$V = W = \mathbb{R}^2$ $\quad \underline{v} \xrightarrow{\mathcal{A}} \underline{0}$ $\quad \dim V = 2$



$\dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} = 2$

$\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = 0$

$V = W = \mathbb{R}^2$ $\quad (x, y) \xrightarrow{\mathcal{A}} (x, 0)$ $\quad \dim V = 2$



$\dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} = 1$

$\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = 1$

TÉTEL: (dimenziótétel)

$\mathcal{A}: V \to W$ lin. lek.

ha $\dim V$ véges $\Rightarrow$ $\boxed{\dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim V}$

biz.: Lemma: V vektortér, $\dim V$ véges

ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ lin. ftlen. $\Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ kiegészíthető bázissá

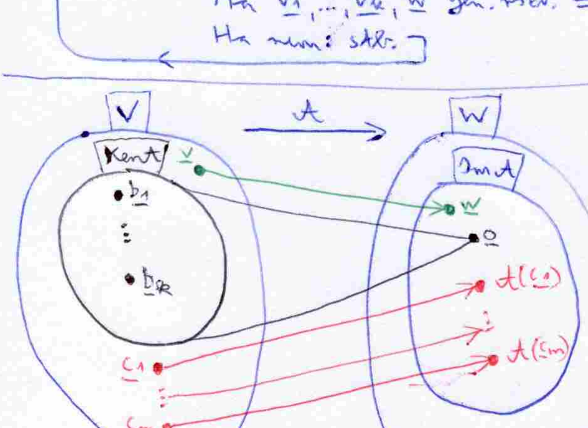
biz.: ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ gen. rsz. $\Rightarrow$ OK

ha nem: $\exists\, \underline{w} \in V$, amire $\underline{w} \notin \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$ azaz $\underline{w}$ vektor nem fejezhető ki $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ lin. kombinációjaként,

tehát $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}$ lin. ftlen., mert ha nem, akkor $\underline{w} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$ egy régebbi lemma miatt.

Ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}$ gen. rsz. $\Rightarrow$ OK

Ha nem: stb.



Legyen $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ egy bázisa.

Legyen $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m$ $V \setminus \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ egy bázisa.

Ekkor $\dim V = k + m$, $\dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} = k$.

Tehát elég azt belátni, hogy $\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = m$, ami ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{A}(\underline{c}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{c}_m)$ bázis $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ban.

gen. rsz. tulajdonságának belátása:

$\underline{w} \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \Rightarrow \underline{w} = \mathcal{A}(\underline{v}),\ \underline{v} \in V$

$\Downarrow$

$\underline{v} = \beta_1 \underline{b}_1 + \dots + \beta_k \underline{b}_k + \gamma_1 \underline{c}_1 + \dots + \gamma_m \underline{c}_m$

$\underline{w} = \mathcal{A}(\underline{v}) = \mathcal{A}(\quad \text{''} \quad) = \beta_1 \cdot \overset{\underline{0}}{\mathcal{A}(\underline{b}_1)} + \overset{\underline{0}}{\dots} + \beta_k \overset{\underline{0}}{\mathcal{A}(\underline{b}_k)} +$

$+ \gamma_1 \cdot \mathcal{A}(\underline{c}_1) + \dots + \gamma_m \cdot \mathcal{A}(\underline{c}_m)$ ✓

lin. fgtl. tulajdonságának belátása:

$\lambda_1 \mathcal{A}(\underline{c}_1) + \ldots + \lambda_m \mathcal{A}(\underline{c}_m) = \underline{0} \iff \mathcal{A}(\lambda_1 \underline{c}_1) + \ldots + \mathcal{A}(\lambda_m \underline{c}_m) = \underline{0} \iff \mathcal{A}(\lambda_1 \underline{c}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{c}_m) = \underline{0} \implies$

$\implies \lambda_1 \underline{c}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{c}_m \in \mathrm{Ker}\, \mathcal{A} \implies \lambda_1 \underline{c}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{c}_m = \beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_k \underline{b}_k$ } mert $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$ bázis $\mathrm{Ker}\, \mathcal{A}$-ban

$\lambda_1 \underline{c}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{c}_m - \beta_1 \underline{b}_1 - \ldots - \beta_k \underline{b}_k = \underline{0}$ $\quad \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_m, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$ lin. fgtl. $\implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ ✓

(és $\beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$)

11. TÉTEL

DEF.: lineáris transzformáció: olyan lin. leképezés, mely azonos vektorterek között hat, képletesen: $\mathcal{A}: V \to V$

DEF.: $\underline{0} \neq \underline{v} \in V$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértéke $\mathcal{A}$-nak, ha $\exists \underline{0} \neq \underline{v} \in V$, hogy $\mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$

Példa: $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}: (x, y) \mapsto (x, 0)$

$\underline{u}$ sajátvektor: $\underline{u} = (x, 0)$ $(x \neq 0)$ $\mathcal{A}(\underline{u}) = 1 \cdot \underline{u}$ $\lambda = 1$ s.é.

$\underline{v}$ sajátvektor: $\underline{v} = (0, y)$ $(y \neq 0)$ $\mathcal{A}(\underline{v}) = 0 \cdot \underline{v}$ $\lambda = 0$ s.é.

Példa: $V = \mathbb{R}^2$ $\underline{v} \xrightarrow{\mathcal{A}} 2\underline{v}$

$\lambda = 2$ s.é.: $\forall \underline{v} \neq \underline{0}$ s.v. $(\lambda = 2$-höz$)$

TÉTEL: $\mathcal{A}: V \to V$ lin. tr., λ s.é.-e $\mathcal{A}$-nak. Ekkor $\overset{W}{\boxed{\{ \lambda\text{-hoz tartozó s.v.-k és a } \underline{0} \}}}$ altér V-ben, ezt hívjuk (egy adott λ-hoz tartozó) sajátaltérnek.

biz.: (i) $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ cél: $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$

$\mathcal{A}(\underline{w}_1) = \lambda \underline{w}_1$ $\mathcal{A}(\underline{w}_2) = \lambda \underline{w}_2$ $\mathcal{A}(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \mathcal{A}(\underline{w}_1) + \mathcal{A}(\underline{w}_2) = \lambda \underline{w}_1 + \lambda \underline{w}_2 = \lambda \cdot (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) \in W$ ✓

(ii) $\underline{w} \in W$ cél: $\alpha \cdot \underline{w} \in W$

$\mathcal{A}(\underline{w}) = \lambda \cdot \underline{w}$ $\mathcal{A}(\alpha \cdot \underline{w}) = \alpha \cdot \mathcal{A}(\underline{w}) = \alpha \cdot (\lambda \underline{w}) = \lambda \cdot (\alpha \underline{w}) \in W$ ✓

(iii) $W \neq \emptyset$ mert $\underline{0} \in W$ ✓

DEF.: M $n \times n$-es mátrix egy lin. tr. mátrixa

$\underline{0} \neq \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ sajátvektora M-nek, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, hogy $M \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértéke M-nek, ha $\exists \underline{0} \neq \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ (röviden: létezik olyan nullvektortól különböző $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{x}$ vektor), hogy $M \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$

Példa: $M = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3x_1 + 7x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 7x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} (3 - \lambda) x_1 + 7x_2 = 0 \\ (4 - \lambda) x_2 = 0 \end{matrix}$

1. eset: $x_2 \neq 0 \Longrightarrow \lambda = 4 \Longrightarrow -x_1 + 7x_2 = 0 \Longrightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 7x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $x_2 \neq 0$

2. eset: $x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 \neq 0 \Longrightarrow \lambda = 3$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_1 \neq 0$

TÉTEL: $\mathcal{A}: V \to V$ lin. tr., $B = \{ \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n \}$ bázis V-ben

$\mathcal{A}$-nak λ sajátértéke, $\underline{v}$ sajátvektora $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{[\mathcal{A}]_B}_{\mathcal{A} \text{ mátrixa } B \text{ szerint}}$-nek λ s.é.-e, $\underbrace{[\underline{v}]_B}_{\underline{v} \text{ vektor } B \text{ bázis szerinti koordinátavektora}}$ s.v.-a

biz.: $\mathcal{A}$ $\begin{matrix} \lambda \text{ s.é.} \\ \underline{v} \text{ s.v.} \end{matrix} \Longleftrightarrow \mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \Longleftrightarrow [\mathcal{A}(\underline{v})]_B = [\lambda \underline{v}]_B \Longleftrightarrow [\mathcal{A}]_B \cdot [\underline{v}]_B = \lambda \cdot [\underline{v}]_B \Longleftrightarrow$ λ s.é.-e, $[\underline{v}]_B$ s.v.-a $[\mathcal{A}]_B$-nek ✓

TÉTEL: M $n \times n$-es mx., λ s.é.-e M-nek $\Longleftrightarrow \det(M - \lambda \cdot E) = 0$ (E az egységmátrix)

biz.: λ s.é. $\Longleftrightarrow \begin{matrix} \exists \underline{0} \neq \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ M \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x} \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} \exists \underline{0} \neq \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ M \cdot \underline{x} = (\lambda \cdot E) \cdot \underline{x} \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} \exists \underline{0} \neq \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ (M - \lambda E) \underline{x} = \underline{0} \end{matrix} \Longleftrightarrow$ $(M - \lambda E) \underline{x} = \underline{0}$ lin. egy. rendszer.-nek $\exists$ nemtriviális megoldása (mert $\underline{x} \neq \underline{0}$), vagy nem egyértelmű megoldása (és biztosan mindig $\exists$ mo., mert $\nexists$ tilos sor) $\Longleftrightarrow \det(M - \lambda E) = 0$

DEF.: M karakterisztikus polinomja: $\det(M - \lambda E)$

jele: $k_M(\lambda)$

Megjegyzések: sajátérték lehet 0, de sajátvektor nem! Egy lin. tr. sajátértéke pontosan akkor 0, ha $\operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq \underline{0}$, vagyis nullvektortól különböző vektorok képe is lehet $\underline{0}$. És ilyenkor a megfelelő sajátvektorok a magtér nemnulla elemei.

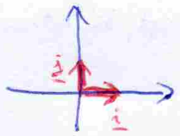
TÉTEL: minden sajátvektorhoz csak egy sajátérték tartozik

biz.: ha valamely $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektorra λ-val és μ-vel is teljesül $\mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \underline{v} = \mu \underline{v}$, akkor ebből $\underline{v} \neq \underline{0}$ miatt $\lambda = \mu$ ✓

Sajátérték, sajátvektor számítása

Egy $\mathcal{A}$ lin. tr. sajátértékeinek kiszámításához az $\mathcal{A}$ lin. tr. egy tetszőleges bázis szerinti mátrixának karakterisztikus polinomjának gyökeit kell megkeresni, ezek lesznek ugyanis a sajátértékek. Az ezeknek megfelelő sajátvektorok meghatározásához a szóba jövő λ-kon vagyis lin. egy. rendszer.-ek nemtriviális megoldásait kell megkeresnünk például Gauss-kiküszöböléssel.

Példa: $V=\mathbb{R}^2$ $\quad (x,y)\xmapsto{\mathcal{A}}(x,0)$ $\quad B=\{\underbrace{(1,0)}_{\underline{i}},\underbrace{(0,1)}_{\underline{j}}\}$



$$\Downarrow$$

$$A=[\mathcal{A}]_B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$k_A(\lambda)=\underbrace{\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\0&-\lambda\end{vmatrix}}_{(1-\lambda)(-\lambda)}=0 \implies \lambda(\lambda-1)=0 \implies \lambda=1 \vee 0$$

I. $\lambda=1$:

$$\begin{array}{cc|c} & & x \\ & & y \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \quad \begin{aligned} 0\cdot x+0\cdot y&=0\\ 0\cdot x-y&=0\end{aligned} \implies \begin{aligned}y&=0\\ x&\in\mathbb{R}\end{aligned} \implies \boxed{\underline{v}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \quad 0\neq x\in\mathbb{R}}$$

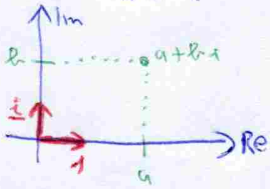
II. $\lambda=0$

$$\begin{array}{cc|c} & & x \\ & & y \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{aligned} x+0y&=0\\ 0x+0y&=0\end{aligned} \implies \begin{aligned}x&=0\\ y&\in\mathbb{R}\end{aligned} \implies \boxed{\underline{v}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \quad 0\neq y\in\mathbb{R}}$$

12. TÉTEL

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ komplex számok halmaza: $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, i: imaginárius szám, $i^2 = -1$

$\mathbb{C}$ egy kétdimenziós vektortér, ahol a bázisok az 1 és az i. $\mathbb{C}$ halmaz elemei a számsíkon ábrázolhatók, aminek valós tengelye a valós számegyenes. A komplex számok halmaza nem rendezhető



képzetes egység, tehát a valós számoknál megismert hagyományos rendezési reláció itt nincs értelmezve.

Algebrai/kanonikus alak

$\boxed{z = a + bi}$ ahol $a = Re(z)$ valós rész, $b = Im(z)$ képzetes rész

TÉTEL: $a + bi = c + di \iff a = c$ és $b = d$

biz.: $\Leftarrow$ triviális ✓

$\Rightarrow$: $a + bi = c + di \Rightarrow a - c = (d - b)i \Rightarrow (a-c)^2 = (d-b)^2 \cdot \overset{-1 \text{ def. szerint}}{i^2} \Rightarrow \underbrace{(a-c)^2}_{\geq 0} = \underbrace{-(d-b)^2}_{\leq 0} \Rightarrow \begin{matrix} a - c = 0 \\ d - b = 0 \end{matrix} \Rightarrow a = c$ és $d = b$ ✓

alapműveletek: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ összeadás

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ kivonás

$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$ szorzás

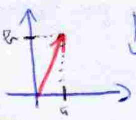
$c + di \neq 0$: $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 - d^2 i^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$ osztás

Az osztásnak nem szükséges megjegyezni ezt a bonyolult képletét, elég csak azt megjegyezni, hogy a nevező konjugáltjával kell bővíteni a törtet, ami által a nevezőből „kiesik" az i.

DEF.: $z = a + bi$

$\bar{z} = a - bi \leftarrow \bar{z}$ (ejtsd: „z felülvonás") a z konjugáltja

tulajdonságok: $z \cdot \bar{z} = \underbrace{a^2 + b^2}_{\geq 0,\ \in \mathbb{R}}$



$\underbrace{|z|}_{z \text{ abszolútértéke}} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

TÉTEL: $z, w \in \mathbb{C}$

(1) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(2) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

(3) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(4) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

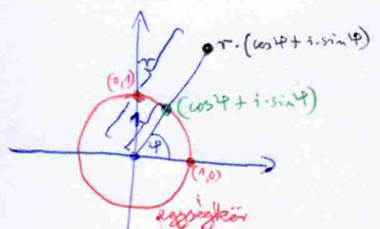
biz.: (1) $z = a + bi$, $w = c + di \Rightarrow \overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (ad + bc)i$, $\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$ és egyenlők ✓

(2) hasonlóan

(3) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \iff |z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2 \iff z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} \iff z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w}$ ✓

(4) hasonlóan

Trigonometrikus alak



$|z| = r \in \mathbb{R}$ $0 \leq r$ r a z abszolútértéke, vagy másképpen: az (a, b) koordinátájú pont távolsága az origótól.

$\varphi = \arg(z) \leftarrow \varphi$ a z argumentuma, aminek a jelentése, hogy az adott pont $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ a nemnegatív valós tengelytől mekkora szögben látszik.

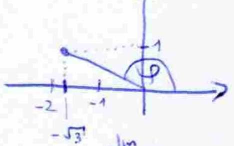
Komplex számok trigonometrikus alakja: $\boxed{z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)}$ ahol $Re(z) = r \cdot \cos\varphi$ a valós rész, $Im(z) = r \cdot i \cdot \sin\varphi$ a képzetes rész

Példa: $z = i - \sqrt{3} = (-\sqrt{3}) + 1 \cdot i$

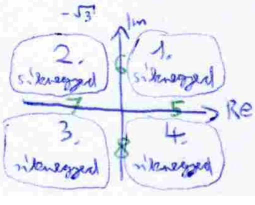
$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

$\varphi = 90° + \operatorname{arctg}\frac{+\sqrt{3}}{1} = 90° + 60° = 150° = \frac{5}{6}\pi$

$\Rightarrow z = i - \sqrt{3} = 2 \cdot \left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \cdot \sin\frac{5}{6}\pi\right)$



FONTOS! Az argumentum kiszámolásához NE használjuk az általános $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ képletet, mert az hibás! Ez csak az 1. síknegyedbeli pontokra igaz, vagyis amikor $0 < a, b$.



$z = a + bi$:

1. $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ ha $0 < a, b$
2. $\varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{-a}{b}$ ha $a < 0 < b$
3. $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ ha $a, b < 0$
4. $\varphi = \frac{3}{2}\pi + \operatorname{arctg}\frac{-a}{b}$ ha $b < 0 < a$
5. $\varphi = 0$ ha $b = 0 < a$
6. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ha $a = 0 < b$
7. $\varphi = \pi$ ha $b = 0 > a$
8. $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ha $a = 0 > b$

Szorzás:

$z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, $w = s\cdot(\cos\mu + i\cdot\sin\mu)$ $\Longrightarrow$ $z\cdot w = r\cdot s\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)(\cos\mu + i\cdot\sin\mu) = r\cdot s\cdot\left[(\cos\varphi\cos\mu - \sin\varphi\sin\mu) + i\cdot(\cos\varphi\sin\mu + \sin\varphi\cos\mu)\right] =$

$z\cdot w = r\cdot s\cdot\left[\cos(\varphi+\mu) + i\cdot\sin(\varphi+\mu)\right]$

TÉTEL: (1) $z\cdot w = r\cdot s\cdot\left[\cos(\varphi+\mu) + i\cdot\sin(\varphi+\mu)\right]$

(2) $(w\neq 0)$ $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\cdot\left[\cos(\varphi-\mu) + i\cdot\sin(\varphi-\mu)\right]$

(3) $1\le n$ egész: $z^n = r^n\cdot\left[\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi)\right]$

n-edik gyökvonás

adott: $z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ probléma: $w = ?$ amire $w^n = z$ ahol $n\ge 1$ egész

$w = s\cdot(\cos\mu + i\cdot\sin\mu)$ $\Longrightarrow$ $w^n = s^n\cdot(\cos n\mu + i\cdot\sin n\mu) = z$ $\Longrightarrow$ $s^n = r$ $\Longrightarrow$ $s = \sqrt[n]{r}$

$\left.\begin{array}{l}\cos n\mu = \cos\varphi \\ \sin n\mu = \sin\varphi\end{array}\right\}$ $\Longrightarrow$ $n\mu = \varphi + 2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$ $\Longrightarrow$ $\mu = \frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}$ $k = 0,1,2,\dots,n-1$

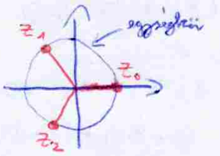
TÉTEL: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right]$ $k = 0,1,2,\dots,n-1$

Példa: $\sqrt[3]{1}$ a komplex számok halmazán:

$z_0 = 1$

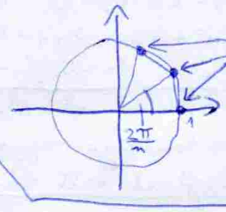
$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$



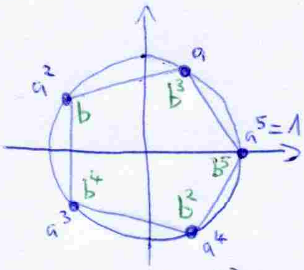
DEF.: a $z^n = 1$ megoldásai az n-edik egységgyökök

$\sqrt[n]{1} = \cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$ $k = 0,1,2,\dots,n-1$



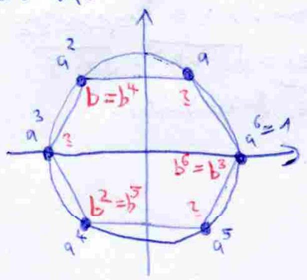
DEF.: primitív n-edik egységgyök: egy olyan $z\in\mathbb{C}$, melyre $z^n = 1$, de $z, z^2, z^3, \dots, z^{n-1}$ mind különböző!

Példa: $n=5$-re



a és b primitív egységgyökök

$n=6$-ra:



a pr. egységgyök, de b nem!

TÉTEL: $z = \cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$

z primitív egységgyök $\Longleftrightarrow$ $(k;n) = 1$ /vagyis k és n legnagyobb közös osztója 1/

13. TÉTEL

Kombinatorikus leszámlálási alapfeladatok

(1.) feladat: A, B, C, D, E → ez az 5 különböző gombóc hányféle sorrendben tehető egy tölcsérbe?

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ ⟹ n elem sorrendjeinek száma (ismétlés nélkül): $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ } n elem (ism. nélk.-i) permutációi

(2.) feladat: ha pl. 26 különböző gombóc választható és ebből 5 különbözőt akarunk kiválasztani (ism. nélkül) és sorbarakni, akkor erre a lehetőségek száma: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$ $\xRightarrow{\text{általánosan}}$ n elemből k különbözőt választunk és állítunk sorba, lehetőségek száma: $\underbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}$

n elem k-adosztályú (ism. nélk.-i) variációi: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

(3.) feladat: 26 gombócból 5 különbözőt választunk és tányérba helyezzük, vagyis a sorrend nem számít.
Lehetőségek száma: $\dfrac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{5!}$

általánosan: n külö. elemből k különbözőt választunk (ism. nélkül), de a sorrend nem számít, lehetőségek száma:

n elem k-adosztályú (ism. nélk.-i) kombinációi $\left\{ \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \stackrel{\text{def.}}{=} \dbinom{n}{k} \right.$ ejtsd: n alatt a k

pl.: $\dbinom{26}{5} = \dfrac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$

Állítás: $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$ biz.: azzal, hogy kiválasztottunk n elemből k elemet, egyúttal kiválasztottuk a maradék (n-k)-t is.

(4.) feladat: van 3 db A, 4 db B, 2 db C és 1 db D. Hányféle sorrendben tehetők ezek egy tölcsérbe, ha az azonos betűk nincsenek megkülönböztetve? Ha az összes elem megkülönböztethető volna, akkor $(3+4+2+1)!$ sorrend volna, de ez éppen $3! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!$-szor több annál, amit mi ki akarunk számolni.
Általánosan: ha van k_1 darab első típusú elem, …, k_n db n-edik típusú elem, akkor ezen elemek lehetséges sorbaállításai $k_1+k_2+\ldots+k_n$ elem ismétléses permutációi: $\dfrac{(k_1+\ldots+k_n)!}{k_1!\,k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$

(5.) feladat: van pl. 26 különböző ízű fagyi, és a tölcsérünkbe 5 gombócot szeretnénk választani úgy, hogy egy fagyiízt többször is választhatunk: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^5$

Általánosan: n elemből képezhető k tagú sorozatok (egy-egy elem többször is előfordulhat) az n elem k-adosztályú ismétléses variációi: n^k

(6.) feladat: 26 fagyiízből 5 gombócot választunk, amiket aztán tányérba helyezzük, vagyis a sorrend nem számít. Erre egy tipikus ROSSZ megoldás a következő: $\dfrac{n^k}{k!} = \dfrac{26^5}{5!}$ A képlet azért hibás, mert a 26^5 választási lehetőség között van pl. olyan eset is, amikor a tányéron mind az 5 gombóc azonos ízű, vagyis ezen a tányéron egyik gombóc sem különböztethető meg, mégis leosztottuk 5!-sal, mintha megkülönböztethetők lennének. Tehát nem szabad a képleteket egy az egyben alkalmazni, hanem a feladatoknál mindig át kell gondolni logikusan, hogy mit érdemes csinálni! Helyes megoldás: a 26 fagyiízt különböztessük meg az angol ABC betűivel: A, B, C, …, Z.

A | B | C | … | X | Y | Z ← Minden szomszédos betű közé húzzunk egy elválasztóvonalat, és az egyes betűk alá tegyünk
  | ** | | … | ** | | * annyi *-ot, ahány gombócot kérünk az adott ízből. Ezáltal elértük azt, hogy egy kiválasztás kölcs. egyért. megfelel egy olyan sorozatnak, amely vonalakból és csillagokból áll. Egy ilyen sorozat pontosan 25 db vonalból (mert az A és Z nem szomszédos) és 5 db *-ból áll. A kérdés átfogalmazva: hány ilyen sorozat van? Pontosan annyi, ahányféleképp kiválaszthatunk 5 elemet egy 25+5=30 elemű halmazból: $\dbinom{30}{5}$
Általánosan: n elem k-adosztályú ismétléses kombinációi: $\dbinom{n+k-1}{k}$

	elrendezés sorrendje számít		sorrend nem számít
	(n elem sorbarendezése)	(n elemből k, sorrendben)	(n-ből k db választása)
	permutáció	variáció	kombináció
ismétlés nélküli	$n!$	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
ismétléses	$\dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!\,k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$	n^k	$\dbinom{n+k-1}{k}$

⑦. feladat: n főből k fős küldöttséget összehozni $\longrightarrow \binom{n}{k}$ lehetőség. Ha előre az n főből egy kitüntetett személy, pl. Kovács úr biztosan benne van a küldöttségben, mennyi lehetőség van kiválasztani a maradék embereket? Megoldás: $\binom{n-1}{k-1}$. Ha viszont Kovács úr nem megy, akkor $n-1$ emberből kell k-t választani: $\binom{n-1}{k}$.
Világos, hogy ez a kettő lefedi a teljes $\binom{n}{k}$ lehetőséget, tehát $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

Állítás: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

biz.: ⑦. feladat. De van egy másik „favágó" módszer is: írjuk ki a binomiális együtthatókat definíció szerinti alakjukra, és némi számolgatás után világossá válik a két oldal azonossága.

Pascal-háromszög:

$$\begin{array}{c} x \quad y \\ x+y \end{array}$$

$\bigcirc = \bigcirc$

$\bigcirc = \bigcirc$

binomiális együtthatók szerint

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

binomiális együtthatók értéke szerint

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

TÉTEL: (binomiális tétel)
ha $1\leq n\in\mathbb{N} \Longrightarrow (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^n b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\ldots+\binom{n}{n}a^0 b^n$

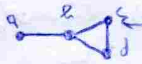
biz.: $(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ darab}}$

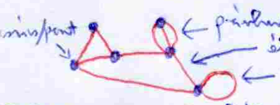
A disztributivitás („minden tagot minden taggal") törvénye alapján $x_1 x_2\cdot\ldots\cdot x_n$ alakú szorzatokat kapunk, ahol $x_1,\ldots,x_n\in\{a,b\}$, ezeket kell összegezni. Egy ilyen tag úgy adódik, hogy kiválasztjuk az első zárójelben levő a vagy b tag közül az egyiket, aztán a másodikból is a-t vagy b-t, stb. Világos, hogy a tagok $a^{n-k}b^k$ alakúak lesznek. A kitevők összege ugyanis n-et kell, hogy adjon, hiszen összesen n darab a-t vagy b-t választunk ki. A kérdés, hogy rögzített k-ra hány darab $a^{n-k}b^k$ létezik? Annyiféle $a^{n-k}b^k$ tag lehet, ahányféleképp n darab $(a+b)$ binomból (kéttagú összegből) kiválaszthatunk b-t, ez pedig pontosan $\binom{n}{k}$.

14. TÉTEL

DEF.: egy gráf egy rendezett pár: $G=(V,E)$, ahol V egy nemüres halmaz, E pedig ebből a halmaznak az elemeiből képezhető párok egy részhalmaza. Jelölések: G gráf; $V(G)$, $E(G)$: G pontjainak/éleinek halmazai; számuk: $v(G)$, $e(G)$

Példa: $V=\{a,b,c,d\}$ $E=\{\{a,b\},\{b,d\},\{c,d\},\{b,c\}\}$





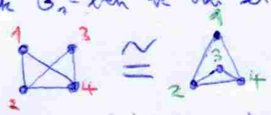
} a gráf egy diagramja a gráf egy olyan lerajzolása, amikor a csúcsoknak pontok felelnek meg, az éleknek szakaszok/törött vonalak.

DEF.: egy él két csúcsot köt össze, amiket végpontoknak hívunk.
Két csúcs szomszédos, ha éllel vannak összekötve. Két él szomszédos, ha van közös csúcsuk.
hurokél: mindkét végpontja ugyanaz a csúcs. Egy él többszörös, ha a gráfban van más él is ugyanezekkel a végpontokkal, egyébként az él egyszerű. Egy gráf egyszerű, ha nincsenek benne párhuzamos és hurokélek.
Egy izolált csúcs olyan csúcs, melyre nem illeszkedik egy él sem. Egy gráf reguláris, ha minden csúcsának fokszáma megegyezik. Egy gráf teljes, ha bármely két csúcs szomszédos, jelölése: K_n. Egy G egyszerű gráf komplementere $\overline{G}$: $V(\overline{G})=V(G)$ és $e\in E(\overline{G}) \Leftrightarrow e\notin E(G)$.

TÉTEL: $\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2\cdot e(G)$ biz.: $\forall$ élnek 2 végpontja van, $\forall$ élt 2-szer számoltunk meg.

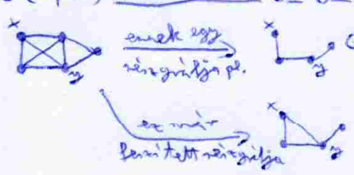
DEF.: $G_1(V_1,E_1)$ és $G_2(V_2,E_2)$ gráfok izomorfak, ha $\exists f: V(G_1)\to V(G_2)$ kölcs. egyért. fgv., amire:
u és v szomszédosak G_1-ben k db él mentén $\Leftrightarrow$ $f(u)$ és $f(v)$ szomszédosak G_2-ben k db él mentén.
Jelölés: $G_1 \cong G_2$

Példa:



DEF.: $G(V,E)$ gráf részgráfja $H(V',E')$ gráf, ha $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$ és $e=\{u,v\}\in E' \Rightarrow u,v\in V'$
$G(V,E)$ feszített részgráfja $H(V',E')$, ha $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$, valamint ha $u,v\in V'$ és $\{u,v\}\in E \Rightarrow \{u,v\}\in E'$

Példa:



← de ez nem feszített, mert az eredeti gráfban pl. x és y szomszédosak, de a részgráfban nem!

DEF.: G gráfban élsorozat: $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3 \dots e_kv_k$ ha $v_0,\dots,v_k\in V(G)$, $e_1,\dots,e_k\in E(G)$ és $e_i=\{v_{i-1},v_i\}$ $\forall i=1,\dots,k$-ra
Ha $v_0=v_k \Rightarrow$ zárt élsorozat (különben nyílt).
Egy élsorozat út, ha bármely két csúcs különböző.
Egy élsorozat kör, ha $v_0=v_k$ és ezen kívül bármely két csúcs különböző, de uvu nem kör.
Megjegyzés: az élsorozatot szokás sétának is hívni.

DEF.: egy gráf összefüggő, ha bármely két csúcsa között vezet út/élsorozat.

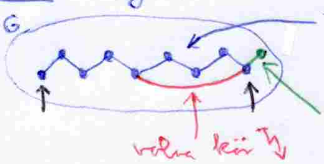
DEF.: G gráf egy komponense egy olyan részgráf, ami feszített, összefüggő, és bármely további csúcsot hozzávéve már nem öf. feszített részgráf lesz.

DEF.: G fa, ha körmentes és összefüggő. Pl.:

G erdő, ha körmentes gráf.

TÉTEL: $\forall$ legalább 2 csúcsú fában van legalább 2 elsőfokú pont

biz.: G



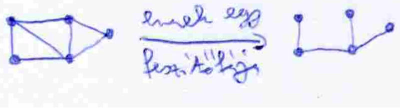
Tekintsük G-ben ezt az egyik leghosszabb utat! Tegyük fel, hogy a fekete nyilakkal jelölt pontok elsőfokúak. Ha nem, akkor a fában volna kör, vagy a leghosszabbnak választott utunknál volna hosszabb út. Mind a kettő ellentmondásra vezetne, tehát a feltételezésünk helyes.

TÉTEL: F fa $\Rightarrow e=n-1$ (e: élek száma, n: csúcsok száma)

biz.: ha $n=1 \Rightarrow e=0$ ✓
ha $2\le n \Rightarrow \exists$ elsőfokú pont, amit elhagyva még mindig fa marad a részgráf. Az elsőfokú pontok elhagyását egészen addig folytatjuk, míg végül $n=1$, $e=0$ adódik. ✓

DEF.: G gráf egy F részgráfja feszítőfa, ha fa és $V(G)=V(F)$.

Példa:



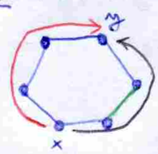
TÉTEL: G-nek van feszítőfája $\Longleftrightarrow$ G öf.

biz.: $\Longrightarrow$: ✓

$\Longleftarrow$: ehhez felhasználunk egy segédtételt:

Lemma: körből egy élt elhagyva az összefüggőség nem romlik el

biz.:



Egy körnek bármely pontjából bármely pontjába kettő különböző úton is el lehet jutni. Ha a körből elhagyunk egy élet, akkor azzal csak az egyik út tűnik meg, a másik út még mindig „járható".

Ha G-ben nincs kör $\Longrightarrow$ készen vagyunk ✓

— " — van kör: G egy köréből hagyjunk el egy élet, stb.

TÉTEL: F körmentes, $e = n-1 \Longrightarrow$ F fa

biz.: indirekt: tfh.: F nem öf.; Tekintsünk egy olyan F' gráfot, melyet F-ből úgy készítünk, hogy kiegészítjük annyi éllel, hogy F' öf. legyen, de körmentes $\Longrightarrow$ F' körmentes és öf. $\Longrightarrow$ F' fa $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow e' = n-1$, $e' > e$ ↯

$e = n-1$

TÉTEL: F öf., $e = n-1 \Longrightarrow$ F fa

biz.: indirekt: tfh.: F-ben van kör. Legyen F' F-nek egy feszítőfája, amit úgy kaptunk, hogy F-ből hagyjunk el éleket (mindig valamely köréből) mindaddig, míg F' körmentes nem lesz, de még öf.

Adódik: $e' = n-1$, $e' < e$ ↯

$e = n-1$

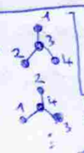
15. TÉTEL

Bevezetés: Hányféle n-pontú, páronként nem izomorf fa létezik?

$n=1$: • → 1
$n=2$: •—• → 1
$n=3$: •—•—• → 1
$n=4$: •—•—•—•,  → 2

} színkódolásának problémája

← Ezt így nehéz megmondani, de ha a fában számokkal különböztetjük meg a pontokat, akkor erre létezik egy egyszerű képlet: lásd → Cayley-tétel.

	fák		számozott fák	
$n=1$	•	1	1	$1 (=1^{-1})$
$n=2$	•—•	1	1—2	$1 = 2^0$
$n=3$	•—•—•	1	1—2—3, 2—1—3, 1—3—2	$3 = 3^1$
$n=4$	•—•—•—•, 	2	1—2—3—4, 1—2—4—3, ⋮ } 12 db;  } 4 db	$16 = 4^2$
⋮	⋮		⋮	⋮

TÉTEL: (Cayley-tétel) n csúcsú, számozott fák száma: n^{n-2}

biz.: Prüfer-kód segítségével

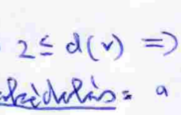
DEF.: Prüfer-kód: egy n pontú, számozott fához rendel egy számsorozatot a következőképpen: hagyjuk el a fa elsőfokú pontjai közül a legkisebb indexűt, és jegyezzük fel a szomszédját (a vele összekötött egyetlen pont indexét), legyen ez p_1. Ismételjük az eljárást egészen addig, amíg csak egy pont marad. Prüfer-kód: $p_1 p_2 \dots p_{n-2} p_{n-1}$

Állítás: a kód legutolsó tagja $p_{n-1} = n$

biz.: Amíg nem jutottunk el az 1 pontú fáig, addig van legalább 2 elsőfokú pont, és így közülük nem lehetett a kisebb sorszám az n. Az utolsó törlés előtti pillanatban pedig így néz ki a fa: $\overset{x}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{n}{\bullet}$, ahol $x < n \Rightarrow$ törlendő: x, kiírandó: n ✓ $\Rightarrow$ ezért p_{n-1}-et nem is szükséges kiírni a kódba, mert nem hordoz plusz információt.

$$\overbrace{\underbrace{p_1 p_2 p_3 \dots p_{n-2}}_{\text{rövid kód}} p_{n-1}}^{\text{hosszú kód}} = n$$

Ezek után világos, hogy az n csúcsú számozott fákhoz tartozó kódok száma: $\overbrace{\underset{n}{\downarrow}\,\underset{n}{\downarrow}\cdots\underset{n}{\downarrow}\,\underset{n}{\downarrow}}^{n-2 \text{ tag}}$ $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n \Rightarrow \underline{n^{n-2}}$

Példa:  ⟹ 1 1 5 4 5 8 8

Állítás: v elsőfokú $\Leftrightarrow$ nem szerepel a rövid kódban

biz.:
- v elsőfokú
  - $v \neq n \Rightarrow$ v-t letöröljük, de nem írjuk le; csak a szomszédját.
  - $v = n \Rightarrow$ Az utolsó törlésig n-et nem írjuk le.
- $2 \le d(v) \Rightarrow v$ idővel elsőfokú lesz, és szomszédai törlésekor v ki lesz írva.

Visszakódolás: a kód hosszúsága tárolja a pontok számát: ha a rövid kód k számból áll, akkor $n = k+2$ a pontok száma. Az élek halmazát a következőképpen határozhatjuk meg: ha a Prüfer-kód tagjait $p_1 p_2 \dots p_{n-2} n$ jelöli, akkor minden p_i fölé kerüljön v_i, p_{n-1} vagyis n fölé pedig v_{n-1} kerül. $\{p_1 v_1, p_2 v_2, \dots, p_{n-2} v_{n-2}, n v_{n-1}\}$ lesz a fa élhalmaza,

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & \dots & v_{n-2} & v_{n-1} \\ | & | & & | & | \\ p_1 & p_2 & \dots & p_{n-2} & n \end{array}}$$

ahol v_i a legkisebb olyan indexű, amire: $v_i \notin \boxed{\{v_1, \dots, v_{i-1}\}} \cup \{p_i, \dots, p_{n-2}, n\}$

és $1 \le i \le n-1$

↑ ha $i=1$ akkor ez $\emptyset$

Példa:

$$\begin{array}{c} 2 \\ | \\ \boxed{1154588} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \boxed{2}\,3 \\ |\;| \\ 1\,\boxed{154588} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \boxed{23}\,1 \\ |\,|\,| \\ 11\,\boxed{54588} \end{array} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{array}{c} \boxed{231645}\,7 \\ |\,|\,|\,|\,|\,|\;| \\ 115458\,\boxed{8} \end{array}$$ kész ✓

TÉTEL: ① visszakódolás fát ad

② kód $\xrightarrow{\text{visszakódolás}}$ fa $\xrightarrow{\text{Prüfer-kód}}$ kód' $\Longrightarrow$ kód = kód'

biz.: ① egy $k_1 k_2 \dots k_x$ hosszú Prüfer-kód esetén a gráf $x+1$ pontú és x él van: $\underset{x}{e} = \underset{x+1}{n} - 1$ ✓.

Elegendő tehát csak azt belátni, hogy körmentes. Tegyük fel indirekt módon, hogy van a gráfban kör. A P.-kód visszafejtése során minden egyes újabb v_i felírásakor egy újabb pontot, és egy újabb élet kapunk meg. Kell lennie egy olyan lépésnek, amikor a kör utolsó élét húzzuk be, de akkor egy olyan v_i-t kéne felírnunk, amely már korábban szerepelt, ez azonban az eljárásban nem lehetséges. ↯

② vizsgán nem kell

Minimális összsúlyú feszítőfák

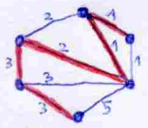
Bevezetés: adott egy G öf. gráf, és egy költségfüggvény: $e \rightarrow \boxed{s(e)} \geq 0$, $s(e) \in \mathbb{R}$. Keressük G egy min. összköltségű feszítőfáját.

mohó algoritmus: olyan alg., ami a lokálisan kedvező lehetőségeket választja, és nem törődik azzal, hogy ezzel esetleg globálisan rosszabb megoldást ad.

Kruskal-algoritmus: (ez egy mohó alg.)

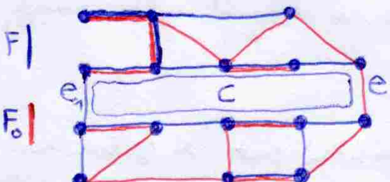
Az éleket egyesével választjuk ki a következők szerint. Először válasszuk ki a gráfból a legkisebb súlyú élek egyikét. Tfh. már kiválasztottunk néhány élet. Ekkor válasszuk ki a legkisebb súlyú olyan élek egyikét, amely nem alkot kört az eddig már kiválasztottakkal. Ha ilyen nincs, megálltunk, ha van, akkor ezt az eljárást ismételjük.

Példa:



Kruskal-tétele: a K.-alg. a legolcsóbb feszítőfák egyikét adja

biz.: Nyilvánvaló, hogy az algoritmus végén a kiválasztott élek egy F feszítőfát alkotnak (mert F-hez bárhogy hozzávéve egy plusz élet már tartalmazna kört). Tegyük fel indirekt, hogy F_0 min. súlyú feszítőfa és $s(F_0) < s(F)$. Ha több ilyen ellenpélda van, akkor ezek közül azt válasszuk F_0-nak, amelynek a lehető legtöbb közös éle van F-fel.



Legyen $e_0 \in E(F_0) - E(F)$, ha ezt hozzávesszük F-hez, akkor kapunk egy C kört. Ha valamely $e \in E(C) - \{e_0\}$ élre $s(e) > s(e_0)$ állna, akkor az algoritmus során e helyett e_0-t választottuk volna $\Longrightarrow s(e) \leq s(e_0)$ $\forall e \in E(C)$-re. Mivel $F_0 - e_0$ két komponensből áll, van legalább egy olyan $e_1 \in E(C) - \{e_0\} \subseteq E(F)$ él, melynek két végpontja a két különböző komponensben van. Nyilván feszítőfa az $F_1 = F_0 - e_0 + e_1$ is. Már láttuk, hogy $s(e_1) \leq s(e_0)$.

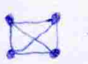
Nem lehet azonban $s(e_1) < s(e_0)$, mert akkor $s(F_1) < s(F_0)$ volna, ami ellentmond F_0 minimalitásának. ↯

Csak $s(e_1) = s(e_0)$ lehetne, de akkor F_1 olyan ellenpélda lenne, amelynek eggyel több közös éle van F-fel, mint F_0-nak, ez is ellentmond a feltevésnek. ↯

16. TÉTEL

DEF.: egy gráf síkbarajzolható, ha lerajzolható a síkba úgy, hogy az élek csak a csúcsokban metszhetik egymást. A síkbarajzolás a síkot | tartományokra / lapokra | osztja. Lesz egy végtelen tartomány, az ún. külső tartomány.

Hasonlóan definiáljuk a gömbrerajzolhatóságot, ahol sík helyett a gömb felszínén dolgozunk, külső tartományról nem beszélünk.

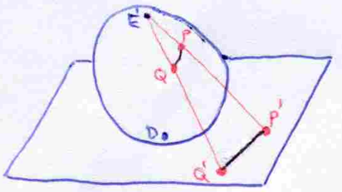
Példa:  $\xrightarrow{\text{síkbarajzolható}}$ 

TÉTEL: G síkbarajzolható $\Leftrightarrow$ G gömbre rajzolható

biz.: sztereografikus projekcióval: a gömböt úgy helyezzük el, hogy a síkot a déli sarkon érintse, és az északi sarokból egyenes vetítéssel a sík pontjai bijektíven megfelelnek az északisark-mentes gömbfelszín pontjainak.

Tulajdonságai: a sík egyeneseit a gömbfelszín északi sarkon átmenő köreibe viszi, a sík köreit a gf. északi sarokra nem illeszkedő köreibe.

Ezenkívül: szögtartó, de nem távolságtartó.



TÉTEL: Ha G síkbarajzolható és T egy tetsz. tartománya $\Rightarrow$ úgy is síkbarajzolható, hogy T a külső t. legyen

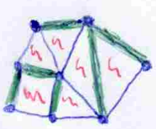
biz.: sztereografikus projekcióval: a gömböt úgy helyezzük a síkra, hogy D T-n belül legyen. Vetítsük G ezen síkbarajzolását a gömbre, a gömböt forgassuk odébb úgy, hogy É és D helyet cseréljen, és D-ből vetítsük vissza a gömbfelszínt a síkra.

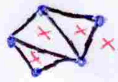
TÉTEL: Euler-tétel: ha G s.r. és öf. $\Rightarrow$ $cs + l = é + 2$ / csúcsok + lapok = élek + 2 /

biz.: mindig elhagyjuk a gráf egy körének élét $\rightarrow$ egyesítünk két tartományt

felhasznált élek száma: $l-1$, megmaradt élek feszítőfát alkotnak, tehát számuk $cs-1$

A felhasznált és megmaradt élek adják az eredeti gráf élhalmazát: $é = (l-1)+(cs-1) \Rightarrow \underline{cs + l = é + 2}$



Példa:  $cs = 5$ $é = 7$ $\Rightarrow 5 + 4 = 7 + 2$ ✓
$l = 4$

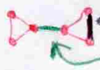
Euler-tétel általánosítása: $cs + l = é + k + 1$ (k: komponensek száma) biz.: hasonlóan, csak a vallatgatás végén feszítőerdő adódik, amire az igaz, hogy $é = cs - k$.

TÉTEL: ha G egyszerű, s.r., legalább 3-pontú $\Rightarrow$ $e \leq 3n - 6$

biz.: I. ha G öf.: c_i: i. tartományt határoló élek száma, $3 \leq c_i$ mert G egyszerű

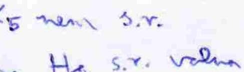
$3(e + 2 - n) \overset{\text{Euler}}{=} 3t \leq c_1 + c_2 + \ldots + c_t \leq 2e$ $\rightarrow$ mert egy él legfeljebb két tartományt határolhat

$3e + 6 - 3n \leq 2e \Rightarrow \underline{e \leq 3n - 6}$

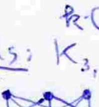
Példa:  ← 2 tartományt határol ← 1 tartományt határol

II. ha nem öf.: új élekkel öf.-vé tesszük + I. eset

$e + e' \leq 3n - 6 \Rightarrow \underline{e \leq 3n - 6}$ ✓



Állítás: K_5 nem s.r.

biz.:  Ha s.r. volna, akkor $e \leq 3n - 6$-nak teljesülnie kéne, de $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ nem igaz! ↯

TÉTEL: ha G egyszerű, s.r., ∀ kör legalább k élű (és $k \leq n$) $\Rightarrow$ $e \leq \frac{k}{k-2} \cdot (n-2)$

biz.: I. ha G öf.: c_i: i. tartományt határoló élek száma, $k \leq c_i$

$k \cdot (e + 2 - n) \overset{\text{Euler}}{=} kt \leq c_1 + \ldots + c_t \leq 2e \Rightarrow ke + 2k - kn \leq 2e \Rightarrow (k-2)e \leq k(n-2) \Rightarrow \underline{e \leq \frac{k}{k-2} \cdot (n-2)}$

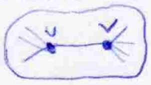
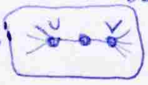
Állítás: $K_{3,3}$ nem s.r.

biz.:  tegyük fel indirekt, hogy $K_{3,3}$ s.r.! Triviális, hogy ∀ kör ≥ 4 élű. Mivel $K_{3,3}$ s.r., ezért teljesülnie kell az előző tételnek: $e \leq \frac{k}{k-2} \cdot (n-2)$ behelyettesítve: $9 \leq \frac{4}{4-2} \cdot (6-2) = 2 \cdot 4 = 8$ ↯

TÉTEL: G egyszerű, s.r. $\Rightarrow$ minimális fokszám legfeljebb 5

biz.: feltételezzük: $3 \leq n$. Bizonyítás indirekt, tfh.: $d_{min} > 5 \Leftrightarrow d_{min} \geq 6$. $6n \leq \sum d = 2e \leq 2(3n - 6) \Rightarrow 6n \leq 6n - 12$ ↯

Egy gráf síkbarajzolhatóságát nyilván nem befolyásolja, hogyha egy élet egy 2 hosszú úttal helyettesítünk, azaz egy élet egy új 2 fokú csúccsal két élre bontunk, vagy ha egy 2 fokú csúcsra illeszkedő éleket egyesítjük, és a csúcsot elhagyjuk.

 $\Longleftrightarrow$ 

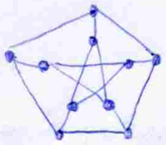
DEF.: G és H topologikusan izomorfak, ha az előzőleg említett transzformációk ismételt alkalmazásával G-ből H megkapható.

Kuratowski-tétel: G s.r. $\Longleftrightarrow$ nem tartalmaz olyan részgráfot, amely topologikusan izomorf K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal.

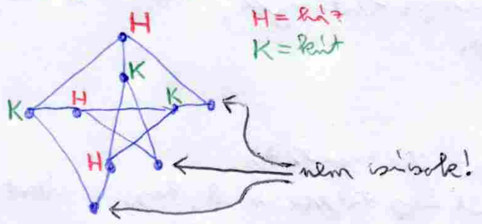
biz.: szükségesség: ha G s.r., akkor $\forall$ H részgráfja s.r.! Ha H s.r. topologikusan izomorf egy K-val, akkor K is s.r.! így $K = K_5$ vagy $K_{3,3}$ nem lehetséges ha G s.r. volt.

elégségesség: nem triviális, nem bizonyítjuk, vizsgán sem kell

Példa: Petersen-gráf:

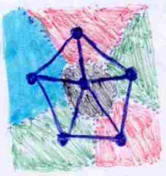


a következőképpen lehet átrendezni, hogy tartalmazza a $K_{3,3}$-at $\Longrightarrow$



Fáry-Wagner-tétel: ha G s.r. és egyszerű $\Longrightarrow$ lerajzolható egyenes szakaszokkal is

17. TÉTEL

Bevezetés: 

Kb. másfél évszázada vették észre, hogy bármely politikai térképet ki lehet színezni 4 színnel úgy, hogy a közös határvonallal rendelkező országok eltérő színűek legyenek. Csak 1977-ben sikerült Appel és Haken matematikusoknak bebizonyítani ezt a sejtést, amit azóta négyszín-tételnek hívnak. A problémát úgy lehet a gráfelméletbe átültetni, hogy az országoknak pontok felelnek meg, az országhatároknak pedig az országok pontjait összekötő élek.

DEF.: G síkbarajzolt gráf; G^* duális gráf csúcsai a G tartományai, és G^*-ban 2 csúcs szomszédos k él mentén $\iff$ G-ben megfelelő tartományok határosak k él mentén

DEF.: G gráf, $X \subseteq E(G)$; X elvágó élhalmaz, ha X éleit elhagyva G komponenseinek száma megnő; X vágás, ha elvágó élhalmaz, de semmilyen valódi részhalmaza nem az; az e él elvágó él, ha $\{e\}$ vágás; a G gráf e és e' élei soros élek, ha $\{e, e'\}$ vágás; két él párhuzamos, ha ezek egy 2 hosszú kört alkotnak

Megjegyzés: a G^* duális gráf nem G-től, hanem G adott síkbarajzolásától függ. Adott síkgráf különböző síkbarajzolásai nemizomorf duálisokat adhatnak.

Példa: 

$G \cong H$, de $G^* \not\cong H^*$ (mert $\overbrace{\text{egyikben van 6-odfokú csúcs}}^{G^*}$, $\overbrace{\text{másikban nincs}}^{H^*}$)

emiatt $(G^*)^* \not\cong G$ $\xrightarrow{\text{példa}}$ 

$G \not\cong (G^*)^*$ mert G nem öf., de $(G^*)^*$ igen

TÉTEL: Legyen $G=(V,E)$ síkbarajzolt

(1) Ha G^* a G duálisa, akkor G^* sr. és öf.

(2) Legyen $\varphi(e) := e^*$, ez a $\varphi: E(G) \to E(G^*)$ természetes bijekciót definiál

(3) G lapjai bijektíven G^* pontjainak felelnek meg.

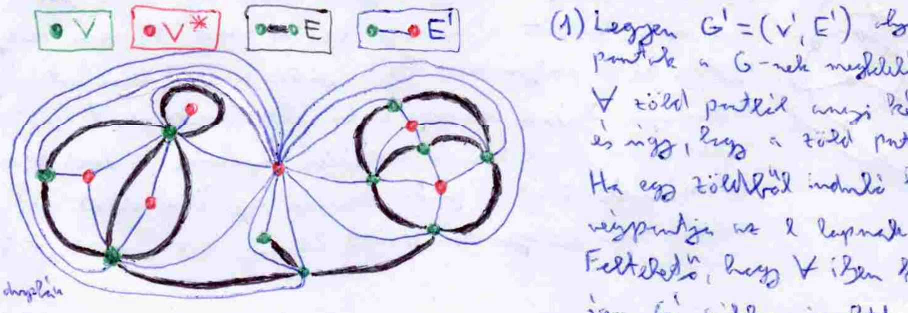
(4) Ha G öf., akkor G a G^* duálisa, így G pontjai $\iff$ G^* lapjai

(5) $e \in E(G)$ a G hurokéle (elvágó éle) $\iff$ $\varphi(e)$ a G^* elvágó éle (hurokéle)

(6) $e, e' \in E(G)$ párhuzamos (soros) élek $\iff$ $\varphi(e), \varphi(e')$ soros (párh.) élek

(7) $C \subseteq E(G)$ a G köre (vágása) $\iff$ $\varphi(C)$ G^* vágása (köre)

(8) Ha G öf. és $F \subseteq E(G)$ feszítőfa G-ben $\iff$ $\varphi(F)$ a G^* egy feszítőfájának komplementere

biz.: 

elvágó élek számítsanak duplán

(1) Legyen $G' = (V', E')$ olyan, hogy $V' = V \cup V^*$, ahol V^*-beli pontok a G-nek megfelelő lapjai. E' éleit úgy kapjuk, hogy $\forall$ zöld pontból annyi kék élt húzunk, ahány fekete éle van a pontnak, és úgy, hogy a zöld pont körül felváltva következzen a fekete és kék. Ha egy zöldből induló kék él l lapra indul, akkor az él másik végpontja az l lapnak megfelelő piros V^*-beli pont lesz. Feltehető, hogy $\forall$ ilyen kék élt az adott l lapon belül rajzoltunk, így G' síkbarajzolt! Sőt: $G' \cup E$ (vagyis a fekete és kék éleket együtt tartalmazó gráf) olyan síkbarajzolt gráf, aminek $\forall$ lapja háromszöglap, amiket egy fekete és 2 kék él határol. Ha ebben a $G' \cup E$-ben bármely fekete élt elhagyom, akkor 2 3szöglapot egyesítek egy 4szöglappá, mit 4 kék él határol. G'-ből G úgy kapható, hogy G' 4szöglapjaiban összekötöm a zöld pontokat. De megtehetem azt is, hogy $\forall$ 4szöglapban a piros pontokat kötöm össze, az így kapott gráf szintén síkbarajzolt, és ez definíció szerint pont G^*. ✓ (G^* összefüggőségének bizonyítása a túloldalon...)

(2), (3) Duális definíciójából világos.

(4) Mivel G^* $\forall$ éle pontosan egy élét metszi G-nek pontosan egyszer, G^* bármely lapja tartalmazza G-nek min. 1 pontját; mivel G öf., Euler-tétel miatt $n+t=e+2$, de G^* is öf.: $n^*+t^*=e^*+2$, és $e=e^*$, $t=n^* \Rightarrow n=t^*$ ✓

(5), (6), (7) Elegendő (7)-et bizonyítani, (5) és (6) ebből következik. Ha C a G köre, akkor C 2 részre osztja a síkot, ezért $\varphi(C)$-t elhagyva a kettéle osztott tartományoknak megfelelő duális csúcsok különböző komponensbe tartoznak. Mind a kör belsejében levő, mind a kör külsejében levő duális csúcsok öf. gráfot feszítenek ki, ezért $\varphi(C)$ valódi részhalmaza elhagyásakor G^* öf. marad $\Rightarrow \varphi(C)$ vágás. ✓

Ha Q a G vágása, akkor Q a G egy K komponensét szétvágja egy K_1 és K_2 komponensre. Ha Q tartalmaz egy elvágó élt, akkor Q minimalitása miatt Q ez az elvágó él lesz, aminek képe $\varphi(Q)$ hurokél, ami kör. ✓ Egyébként Q $\forall$ éle 2 különböző tartományt határol, így K_1-et min. 2 tartomány határolja. A K_1 komponens körüljárása a határolótartományok egy ciklikus sorrendjét adja, és belátható, hogy ebben $\forall$ határoló tartomány pontosan egyszer szerepel, ezért $\varphi(Q)$ a G^* egy köre. ✓

(8) egyik bizonyítás: F a G max. körmentes részgráfja $\iff$ F^* a G^* max. elvágó élhalmazmentes részgráfja $\iff$ $\iff$ $E(G^*) \setminus F^*$ a G^* min. öf. részgráfja $\iff$ $E(G^*) \setminus F^*$ feszítőfa ✓

(8) másik bizonyítás: azt kell belátni, hogy $E(G^*)\setminus F^*$ feszítőfa G^*-ban

1) $E(G^*)\setminus F^*$ öf., mert ha nem volna $\Rightarrow$ F^* elvágó éll. $\Rightarrow$ F^* tartalmaz vágást $\Rightarrow$ F tartalmaz kört ↯

2) $E(G^*)\setminus F^*$ körmentes, mert ha nem $\Rightarrow$ $E(G)\setminus F$ tartalmaz vágást $\Rightarrow$ $E(G)\setminus F$ elvágó éll. $\Rightarrow$ F nem öf. ↯

<u>DEF.:</u> G és H gráfok <u>gyengén izomorfak</u>, ha $\exists f: E(G)\to E(H)$ kölcs. egyért. fgv. úgy, hogy néhány él G-ben kört alkot $\Leftrightarrow$ képeik kört alkotnak H-ban. Jele: $G \overset{2}{\cong} H$

<u>ÁLLÍTÁS:</u> $G \cong H \Rightarrow G \overset{2}{\cong} H$ (de visszafele nem igaz!)

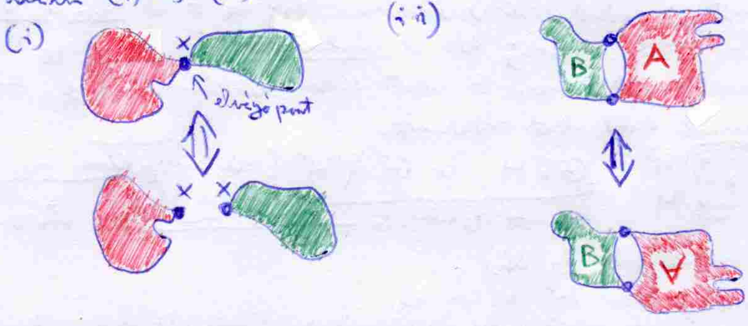
<u>TÉTEL:</u> (Whitney) G, H síkbarajzolható

(1) $G \overset{2}{\cong} H \Leftrightarrow G^* \overset{2}{\cong} H^*$

(2) $(G^*)^* \overset{2}{\cong} G$

<u>TÉTEL:</u> (Whitney)

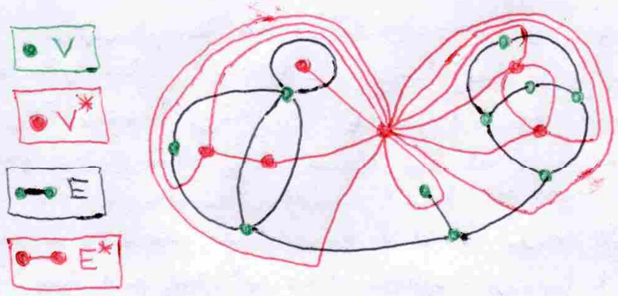
$G \overset{2}{\cong} H \Leftrightarrow$ előáll (i) és (ii) műveletekkel G-ből H megkapható



<u>DEF.:</u> G és H gráfok <u>absztrakt duálisai</u> egymásnak, ha $\exists f: E(G)\to E(H)$ kölcs. egyért. fgv. úgy, hogy néhány él kört alkot G-ben $\Leftrightarrow$ képeik vágást alkotnak H-ban

<u>TÉTEL:</u> G-nek $\exists$ absztrakt duálisa $\Leftrightarrow$ G síkbarajzolható (Whitney)

<u>előző oldali tétel (1)-es állítás második részének bizonyítása (G^* összefüggősége):</u>



Azt kell még igazolni, hogy G^* öf., azaz bármely piros csúcsa között vezet út. Tekintsünk a síkon egy olyan görbe vonalat, ami ezek között a csúcsok között vezet, de nem megy át G egyetlen zöld pontján sem. Ez a görbe a G gráfon tartományról tartományra halad, mindig a G élét átmetszve. $\forall$ ilyen tartományugrásnál a duálisban a megfelelő lapokhoz tartozó piros csúcsok szomszédosak, tehát a görbe definiál egy élsorozatot G^*-ban, amiből már könnyen készíthető bármely két piros csúcsot összekötő út.

18. TÉTEL

DEF.: tfh. az f függvény az A halmaz elemeihez a B halmaz elemeit rendeli, jelölése: $f: A \to B$.
Az f függvény injektív, ha különböző elemekhez külön. elemeket rendel, azaz $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ $\forall x, y \in A$-ra. Az f fgv. szürjektív/ráképezés, ha B $\forall b$ elemének van $\exists$ őse A-ban úgy, hogy $f(a)=b$.
Az f bijektív, ha injektív és szürjektív, azaz kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést teremt A és B elemei között.

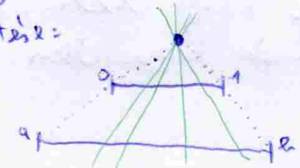
DEF.: A és B halmaz számossága egyenlő, ha $\exists$ bijekció A és B között. Jele: $|A| = |B|$.
A halmaz számossága kisebb vagy egyenlő B-énél, ha $\exists$ injekció A-ból B-be. Jele: $|A| \leq |B|$.
A halmaz számossága kisebb B-énél, ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \neq |B|$. Jele: $|A| < |B|$.

DEF.: A halmaz véges számosságú, ha van olyan k véges természetes szám, hogy A és a $K = \{1, 2, \dots, k\}$ halmazok egyenlő számosságúak: $|A| = |K| = k$. Egy halmaz végtelen sz.-ú, ha nem véges sz.-ú.

Példák a bijekcióra:

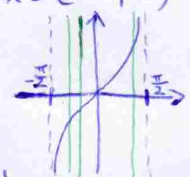
Állítás: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(a,b) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow |(0,1)| = |(a,b)|$

biz.: tekintsük a következő kölcs. egyért. fgv.-t: $x \mapsto (b-a)x + a$ ez megfelelő ✓
ennek egy geometriai szemléltetése:



Állítás: $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$

biz.: Az előző áll. miatt igaz, hogy $|(0,1)| = |(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|$, és a következő fgv. igazolja a $|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|$ egyenlőséget:
$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $x \overset{f}{\mapsto} tg(x)$. f bijektív, $D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $R_f = \mathbb{R}$ ✓



Állítás: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

biz.:

$\mathbb{N}$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\mathbb{Z}$:	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	...

✓

Állítás: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

biz.: $\mathbb{Q}$ elemeit rendezzük a következők szerint:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \dots \\
\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & \dots \\
\frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-4}{3} & \dots \\
\frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-5}{4} & \dots \\
\frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-3}{5} & \dots \\
\vdots
\end{array}$$

$\mathbb{N}$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 ...
$\mathbb{Q}$:	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	−1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-3}{2}$	−2	3 ...

↑ $\mathbb{Q}$ elemeit így rendezve és párosítva a természetes számokkal, a két halmaz között bijekciót létesítettünk. ✓

DEF.: egy A halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú, ha $|A| = |\mathbb{N}|$, vagyis A elemei sorba rendezhetők.
Jele: $|A| = \aleph_0$ (ejtsd: alef null)

TÉTEL: (előző állítás általánosítása) Ha megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt B_i halmazunk van és $\forall$ megszáml., akkor egyesítésük is az. Képletesen: Ha $|B_i| = \aleph_0$ $\forall i = 1, 2, \dots$-re (indexhalmaz megszáml. ∞), akkor $\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right| = \aleph_0$.

biz.: hasonlóan:

$B_1 = \{b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, \dots\}$
$B_2 = \{b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, \dots\}$
$B_3 = \{b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{34}, \dots\}$
$B_4 = \{b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{44}, \dots\}$
$\vdots$ $\quad b_{51}$

Ezzel a „kígyózvással" kölcs. egyért. megfeleltetjük $\forall B_i$ $\forall b_{ij}$ elemét $\mathbb{N}$ elemeinek. ✓

DEF.: az A halmaz <u>kontinuum számosságú</u>, ha $|A| = |\mathbb{R}|$. Jele: $|A| = \mathfrak{c}$ (gót „c")

TÉTEL: (Cantor) $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$

<u>biz.:</u> az állításnak egy ekvivalens megfelelőjét fogjuk bizonyítani: $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}| \iff |(0,1)| \neq |\mathbb{N}|$

indirekt: tfh. $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sorozat $\forall$ $(0,1)$-beli valósat tartalmaz, ahol x_i a következőképpen néz ki:

$$x_1 = 0{,}a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots$$
$$x_2 = 0{,}a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \dots$$
$$x_3 = 0{,}a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \dots$$
$$\vdots$$

átlós módszer

Legyen $x^* = 0{,}b_1\ b_2\ b_3 \dots$ ahol $b_i \neq a_{ii}$ $\Rightarrow$ x^*-ot így megválasztva x^* különbözik bármely x_i-től ez pedig ellentmondás. ↯ $\Rightarrow$ <u>Következmény</u>: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ mert $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ és $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ (gondoljunk az identitásfgv.-re)

TÉTEL: (Cantor–Bernstein) $|A| = |B| \iff |A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$

<u>Példa:</u> $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

<u>biz.:</u>

- $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $\quad x \mapsto x$ identitásfüggvény $\Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ ✓
- $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ Tetszőleges $x \in \mathbb{Q}$ felírható $x = \frac{p}{q}$ alakban, ahol $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^+$ és $(p,q) = 1$, azaz p és q relatív prímek. Legyen ekkor:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } p = 0 \\ 2^p \cdot 5^q & \text{ha } 0 < p \\ 3^{-p} \cdot 5^q & \text{ha } p < 0 \end{cases}$$

↳ Ezáltal $\mathbb{Q}$ $\forall$ eleméhez egyértelműen és injektíven rendeltünk egy term. számot $\Rightarrow$

$\Rightarrow |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$ ✓

19. TÉTEL

DEF.: Egy H halmaz összes részhalmazának halmazát H hatványhalmazának nevezzük. Jele: $P(H)$.
Például $\{a, b\}$ hatványhalmaza $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Vegyük észre, hogy ha $|H| = n$ véges, akkor hatványhalmaza 2^n elemű. Ez indokolja, hogy H hatványhalmazát 2^H-val is jelöljük.

Tehát véges H halmazra teljesül a $|H| < |P(H)|$ reláció. Azonban ez végtelen halmazok esetén is teljesül, ezt mondja ki a következő tétel:

Cantor-tétel: $|H| < |P(H)| \quad \forall H$ halmazra

biz.: Az egyenlőséget meg nem engedő reláció halmazok számossága között definíció szerint azt jelenti, hogy $|H| \leq |P(H)|$ és $|H| \neq |P(H)|$.

(1) $|H| \leq |P(H)|$ igazolása:
Legyen $f: H \to P(H)$ olyan fgv., hogy tetszőleges $x \in H$ elemhez a $\{x\}$ részhalmazt rendeli. ✓

(2) $|H| \neq |P(H)|$ igazolása:
indirekt: tfh.: $|H| = |P(H)|$, tehát $\exists f: H \to P(H)$ bijekció (másképpen: kölcsönösen egyértelmű fgv.).
Legyen $A := \{h \in H : h \notin f(h)\}$, vagyis azon H-beli elemek halmaza, melyeket a nekik megfelelő részhalmaz nem tartalmaz. Világos, hogy A a H halmaz egy jól meghatározott részhalmaza, és így f bijektív volta miatt A-nak, mint $P(H)$-beli elemnek $\exists$ egy $a \in H$-beli őse, amire $f(a) = A$. Két eset lehetséges: $a \in A$ vagy $a \notin A$.
- ha $a \in A$, akkor A definíciója miatt $a \notin f(a) = A$ ↯
- ha $a \notin A$, akkor — || — $a \notin f(a)$ nem teljesül $\Rightarrow a \in f(a) = A$ ↯

TÉTEL: $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

biz.: Tudjuk, hogy $|\mathbb{R}| = |(0,1)| \Rightarrow |P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| \Leftrightarrow \boxed{|P(\mathbb{N})| = |(0,1)|}$ ← ezt fogjuk bizonyítani

Lemma: $|P(\mathbb{N})| = |\{0\text{-}1 \text{ sorozatok}\}|$

biz.:
$\mathbb{N}$: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...

pl.: prímek P: 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 ...

pl.: 2k+1 alakúak Z: 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 ...

$$P(\mathbb{N}) \ni H \subseteq \mathbb{N} \xleftrightarrow{\text{bijekció}} (a_i) = \begin{cases} a_i = 1 & \text{ha } i \in H \\ a_i = 0 & \text{ha } i \notin H \end{cases}$$

$\Downarrow$

Ezáltal $\mathbb{N}$ hatványhalmazának $\forall$ elemét kölcs. egyért. megfeleltettük egy 0-1 sorozatnak.

$$|P(\mathbb{N})| = |(0,1)| \overset{\text{lemma}}{\Longleftrightarrow} \boxed{|\{0\text{-}1 \text{ sorozatok}\}| = |(0,1)|}$$

$|\{0\text{-}1 \text{ sorozatok}\}| \leq |(0,1)|$ biz.:

0-1 sorozat $\xrightarrow{f} x \in (0,1)$ $\quad (a_i) \xrightarrow{f} 0{,}2a_0a_1a_2a_3\ldots$ ↳ f injektív ✓

pl.: $010011\ldots \xrightarrow{f} 0{,}2010011\ldots$

$|(0,1)| \leq |\{0\text{-}1 \text{ sorozatok}\}|$ biz.:

$(0,1) \ni x \xrightarrow{g}$ 0-1 sorozat $\quad x = 0{,}\,2\;5\;7\;1\ldots$

$\underbrace{0010}\;\underbrace{0101}\;\underbrace{0111}\;\underbrace{0001}\ldots$ } ez egy egyértelműen visszafejthető 0-1 sorozat ✓

↳ g injektív ✓

↳ Cantor-Bernstein-tétel miatt: $|\{0\text{-}1 \text{ sorozatok}\}| = |(0,1)|$ ✓

A Cantor-tételnek egy következménye, hogy nem létezik a számosságok között legnagyobb, azaz $\forall$ halmaznál van nagyobb számosságú halmaz (pl. a hatványhalmaza). Tehát $\nexists$ olyan halmaz, aminek $\forall$ halmaz eleme, hiszen ennél a halmaznál nem létezhetne nagyobb számosságú halmaz.

TÉTEL: $|\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$ /más szóval kontinuum sok kontinuum méretű halmaz uniója is csak kontinuum számosságú/

biz.: $|\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c} \iff \underbrace{|\mathbb{R}^2| \geq |\mathbb{R}|}_{}$ és $\underbrace{|\mathbb{R}^2| \leq |\mathbb{R}|}_{}$

$(x,0) \longleftarrow x$ ✓ injektív

$\Leftrightarrow |(0,1)\times(0,1)| \leq |(0,1)|$

$(0{,}x_1x_2\ldots ; 0{,}y_1y_2\ldots) \longmapsto 0{,}\overbrace{x_1y_1x_2y_2\ldots}^{\text{„összefésülés"}}$ injektív ✓

Következmény: Megszámlálhatóan sok kontinuum halmaz uniója kontinuum számosságú.

Kontinuum és megszámlálható halmaz uniója kontinuum.

Kérdés: $\exists$-e H, amire $\aleph_0 < |H| < \mathfrak{c}$?

Kontinuum-hipotézis: $\nexists H$, amire $\aleph_0 < |H| < \mathfrak{c}$; általánosítás: ha X végtelen halmaz $\Rightarrow \nexists H$, amire $|X| < |H| < |P(X)|$.

Kurt Gödel bebizonyította, hogy a halmazelmélet szokásos axiómáiból nem lehet a k.h.-t cáfolni. Paul Cohen pedig megmutatta, hogy a k.h.-t nem lehet bebizonyítani. Ez azt jelenti, hogy a k.h. eldönthetetlen a halmazelméleten belül: akár a k.h.-t, akár annak tagadását felvesszük az axiómák közé, akkor ettől nem kerül ellentmondás a halmazelmélet axiómarendszerébe.