1. feladat (6+6+6=18 pont)
Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 1$ körüli Taylor-sorát és azok konvergenciasugarát:

$$f_1(x) = \frac{1}{x+3}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{(x+3)^2}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}.$$

Mo.

$$f_1(x) = \frac{1}{(x-1)+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{4}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n,$$

ha $|x-1| < 4$, tehát a sor konvergenciasugara 4.

$$f_2(x) = -f_1'(x) = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4^{n+1}}(x-1)^{n-1}$$

az egyenletes konvergencia miatt, ha $|x-1| < 4$, tehát a sor konvergenciasugara 4.

$$f_3(x) = (x-1+4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{4}+1\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{2\cdot 4^n}(x-1)^n,$$

ha $|x-1| < 4$, tehát a sor konvergenciasugara 4.

---

2. feladat (12 pont)
Legyen $f(x) = x\sin 2x^2$. Számolja ki $f^{(99)}(0)$ és $f^{(100)}(0)$ értékét.

Mo. A sin függvény 0 körüli hatványsora: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$, tehát

$$f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}x^{4n+3}}{(2n+1)!},$$

tehát mivel $99 = 4\cdot 24+3$, így $f^{(99)}(0) = 99!\frac{2^{2\cdot 24+1}}{(2\cdot 24+1)!} = 99!\frac{2^{49}}{(49)!}$, és $f^{(100)}(0) = 0$, hiszen nem létezik olyan n egész szám, amelyre $4n+3 = 100$.

3. feladat (18 pont)
Hol folytonos illetve totálisan differenciálható az alábbi függvény?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{3x^4+5y^4}\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mo. Ha $(x,y) \neq (0,0)$ akkor a függvény folytonos, mert folytonos függvények összetétele .

Vizsgálandó a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ határérték! Az $y = mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{4m^2x^4}{3x^4+5m^4x^4} = \frac{4m^2}{3+5m^4} \qquad \text{függ } m\text{-től}$$

$\Longrightarrow \quad \nexists$ (polárkoordinátákkal is kijön) a határérték . Így a függvény az origóban nem folytonos, tehát nem totálisan differenciálható . Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor az

$$f'_x(x,y) = \frac{8xy^2(3x^4+5y^4) - 4x^2y^2\cdot 12x^3}{(3x^4+5y^4)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{8x^2y(3x^4+5y^4) - 4x^2y^2\cdot 20y^3}{(3x^4+5y^4)^2}$$

parciális deriváltak folytonosak, tehát a függvény totálisan differenciálható .

---

4. feladat (6+14=20 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy egy kétváltozós függvénynek egy pontban lokális szélsőértékhelye van.
b) Keresse meg az

$$f(x,y) = (x-2y)^3 \;-\; 12x \;+\; 4y^2$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és azok típusát.

Mo. a) Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0,y_0) \in D_f$ pontban (amelynek egy környezetében léteznek a másodrendű parciális deriváltak, és azok folytonosak) lokális szélsőértékhelye van, ha a függvény gradiense az x_0 pontban $\underline{0}$ és

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) - \big(f''_{xy}(x_0,y_0)\big)^2 > 0.$$

b) $f'_x = 3(x-2y)^2 - 12 = 0$, $f'_y = -6(x-2y)^2 + 8y = 0$ egyenletrendszer megoldásai $y = 3$ és $x = 8$, vagy $x = 4$. $f''_{xx} = 6(x-2y)$, $f''_{xy} = f''_{yx} = -12(x-2y)$, $f''_{yy} = 24(x-2y) + 8$, így a $(8,3)$ pontban $f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 12 \cdot 56 - (-24)^2 > 0$, és $f''_{xx} = 12 > 0$, így ebben a pontban a függvénynek lokális minimuma van. A $(4,3)$ pontban $f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = -12 \cdot (-40) - 24^2 < 0$, így ebben a pontban a függvénynek nincs lokális szélsőértékhelye.

---

5. feladat (13 pont)
Milyen nemnegatív x, y, z esetén maximális xy^2z, ha feltesszük, hogy $x + y + z = 20$?

Mo. Keressük az $f(x,y) = xy^2(20-x-y)$ függvény maximumát az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 20$ tartományon . $f'_x = y^2(20-x-y) - xy^2 = y^2(20-2x-y) = 0$, ha $y = 0$ vagy $2x + y = 20$, $f'_y = 2xy(20-x-y) - xy^2 = xy(40-2x-3y) = 0$, ha $x = 0$, vagy $y = 0$ vagy $40 - 2x - 3y = 0$. Így csak az $y = 10$, $x = 5$ stacionárius pont nincs a tartomány határán , és $f(5,10) = 2500$. A határt vizsgálva: $f(0,y) = f(x,0) = f(x, 20-x) \equiv 0$. Így a maximum 2500, és ehhez az $x = 5$, $y = 10$, $z = 5$ választás kell.

---

6. feladat (19 pont)
Számolja ki az $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$ függvény integrálját a $Q = \{(x,y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16,$ $x \leq 0,\ y \geq 0\}$ tartományon.

Mo. Polártranszformációval

$$\iint_Q f(x,y)d(x,y) = \int_2^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2r\cos\varphi r^2 \sin^2\varphi}{r^2} \cdot r d\varphi dr =$$

$$= 2\int_2^4 r^2 dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2\varphi (\sin\varphi)' d\varphi = 2\left[\frac{r^3}{3}\right]_2^4 \left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{112}{9}$$

IMSC feladat (15 IMSC pont)

Egy 1 sugarú gömbbe beleillesztünk egy $\frac{1}{2}$ sugarú végtelen egyenes körhengert úgy, hogy annak egyik alkotója átmenjen a gömb középpontján. Határozza meg a két test közös részének térfogatát!

Mo.

$$V = \iint\limits_{(x-1/2)^2+y^2\le\frac{1}{4}} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\,dz\,dx\,dy = \iint\limits_{(x-1/2)^2+y^2\le\frac{1}{4}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

Polárkoordinátákra áttérve

$$V = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r\sqrt{1-r^2}dr d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(1-|\sin\varphi|^3)\,d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi = 2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}\right)$$