**ANALÍZIS(2)** | **I. ZÁRTHELYI** | **2006. március 16.**
Mérnök Informatikus szak | B kurzus | Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

**1. feladat (10 pont)**

Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$y' = \frac{(2y^2 - 8)\ \operatorname{arctg} x}{y\ (1+x^2)}, \qquad y \neq 0$$

a) Határozza meg az $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ ponton áthaladó megoldását!
b) Határozza meg az $x_0 = 0$, $y_0 = -2$ ponton áthaladó megoldását!

$y \equiv \pm 2$ megoldás (2)

$|y| \neq 2$ : $\quad \frac{1}{4}\int \frac{4y}{2y^2-8}\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\,dx$ (2)

$\frac{f'}{f} \qquad f' f^1$

$$\frac{1}{4}\ln|2y^2-8| = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{ill. } y \equiv \pm 2$$ (4)

a.) $y(0) = -1$ : $\quad C = \frac{1}{4}\ln 6$ (1)

$\frac{1}{4}\ln|2y^2-8| = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + \frac{1}{4}\ln 6\ ;\ y<0$

$(y = -\sqrt{\dots})$

b.) $y(0) = -2$ : $\quad y \equiv -2$ (1)

**2. feladat (11 pont)**

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \neq 0$$

$y_{iá} = y_H + y_{ip}$ (1)

$(H)$ : $\quad y' + \frac{2}{x}y = 0 \implies y' = -\frac{2}{x}y$

Egy megoldást $(Y)$ keresünk és tudjuk, hogy $y_H = C \cdot Y$ alakú:

$\int \frac{1}{y}\,dy = -2\int \frac{1}{x}\,dx \implies \ln y = -2\ln x \implies y = \frac{1}{x^2} = Y$

$\implies y_H = \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$ (5)

an2 zh1060316/1

$y_{ip} = \dfrac{c(x)}{x^2}$ 1 ; $\quad y_{ip}' = \dfrac{c'}{x^2} - \dfrac{2c}{x^3}$

(I): $\dfrac{c'}{x^2} - \dfrac{2c}{x^3} + \dfrac{2}{x}\,\dfrac{c}{x^2} = \dfrac{1}{1+x^2} \Longrightarrow c' = \dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$ 2

$\Longrightarrow c(x) = x - \mathrm{arctg}\, x \Longrightarrow y_{ip} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x^2}$ 2

$y_{id} = \dfrac{C}{x^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x^2}$

**3. feladat (7 pont)**

Hajtsa végre az $u = y^3 + 2x$ helyettesítést az alábbi kezdeti érték problémánál!

$$3y^2\, y' = (y^3 + 2x + 1)^3 \cos(\pi x) - 2\,, \qquad y(1) = -1$$

Milyen differenciálegyenlethez jutott?
Ne oldja meg a kapott differenciálegyenletet!

$u' = 3y^2 y' + 2$ 2 $\Longrightarrow 3y^2 y' = u' - 2$

$u' - 2 = (u+1)^3 \cos \pi x - 2 \Longrightarrow u' = (u+1)^3 \cos \pi x$ 3

szétválasztható változójú 1

$y(1) = -1:\quad u(1) = -1 + 2 = 1$ 1

**4. feladat (3+7+6=16 pont)**

$$y' = x^2 - 4x + y^2 - 2y + 3$$

(Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet!)

a) Írja fel a differenciálegyenlet izoklináinak egyenletét!

b) Rajzolja fel azon izoklinákat, melynek pontjaiban a vonalelemek hajlásszöge $0$, $\dfrac{\pi}{4}$, illetve $-\dfrac{\pi}{4}$ ! Rajzoljon be néhány vonalelemet!

c) Milyen lokális tulajdonsága van a $P_0(1,0)$ ponton áthaladó megoldásnak a $P_0$ pontban?

a.) $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 3 = K$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = K + 2 \quad \Longrightarrow \quad K \geq -2$

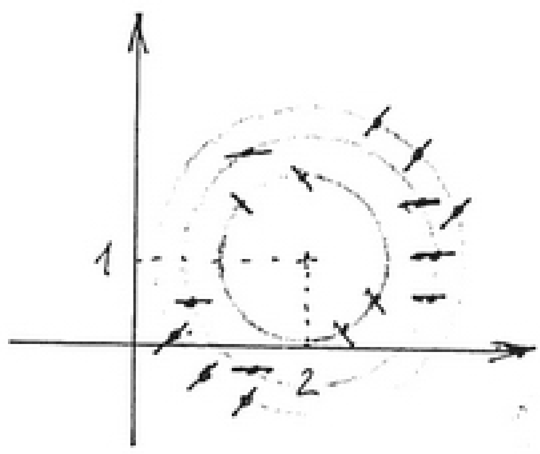
b.) Az izoklinák $(2,1)$ középpontú $\sqrt{K+2}$ sugarú körök

$K = 0$, $K = 1$, $K = -1$ vizsgálandó

$K = 0: \quad \sqrt{2}$ sugarú

$K = 1: \quad \sqrt{3}$ sugarú

$K = -1: \quad 1$ sugarú



c.) $y(1)=0$

$y'(1)=1-4+0-0+3=0$ lokális szélsőérték lehet

$y''=2x-4+2yy'-2y'$ $\quad x=1, y=0, y'=0$

$y''(1)=-2$

Inflexiós pont nincs, mert $y''(1)\neq 0$.

Viszont $y'(1)=0$, $y''(1)<0$ : lok. max. van $P_0$-ban

**5. feladat (7 pont)**

Írjon fel egy olyan lineáris konstans együtthatós homogén differenciálegyenletet, melynek megoldása:

$$e^{3x}\cos 2x \qquad \text{és} \qquad x^2+5$$

$e^{3x}\cos 2x$ : $\lambda_{1,2}=3\pm j2$ (2)

$x^2+5$ : $\lambda_{3,4,5}=0$ (2)

A karakterisztikus egyenlet:

$$\underbrace{(\lambda-(3+j2))(\lambda-(3-j2))}_{((\lambda-3)-j2)((\lambda-3)+j2)=(\lambda-3)^2-(j2)^2}\lambda^3=(\lambda^2-6\lambda+13)\lambda^3=\lambda^5-6\lambda^4+13\lambda^3=0$$

(2)

A differenciálegyenlet:

$$y^{V}-6y^{IV}+13y'''=0$$ (1)

**6. feladat (11+4=15 pont)**

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'''+y''-2y'=\cos x$$

b) Milyen alakban keresheti az alábbi differenciálegyenlet egyik megoldását?

$$y'''+y''-2y'=6\,\mathrm{ch}\,5x+9$$

(Nem kell megkeresnie!)

a.) (H): $\lambda^3+\lambda^2-2\lambda=\lambda(\lambda^2+\lambda-2)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)=0$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-2 \Rightarrow y_H=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-2x}$

(5) $\quad C_i\in\mathbb{R}$

$y_{ip} = A\cos x + B\sin x$

$-2 \cdot \quad y_{ip}' = -A\sin x + B\cos x$

$1 \cdot \quad y_{ip}'' = -A\cos x - B\sin x$

$1 \cdot \quad y_{ip}''' = A\sin x - B\cos x$

$(-2B - B - A)\cos x + (2A + A - B)\sin x = \cos x$

$$\left.\begin{matrix} -3B - A = 1 \\ 3A - B = 0 \end{matrix}\right\} A = -\frac{1}{10} \;;\; B = \frac{-3}{10}$$

$y_{ip} = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$ 5

$y_{id} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$ 1

b.) $f(x) = (3e^{5x}) + (3e^{-5x}) + (9\ )$

$y_{ip} = (Ae^{5x}) + (Be^{-5x}) + (Ax)$

külső rez .

**7. feladat (6+8+4=18 pont)**

a) Írja le a gyökkritérium két tanult alakját!

b) Döntse el az alábbi sorok konvegenciáját!

b1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2+2n}$ b2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n}$

a) T1 Ha $\forall\, n > N$-re $a_n > 0$ és

1.) $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv.

2.) $\sqrt[n]{a_n} \ge 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ div. 3

T2. Ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$ és

$c < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv.

$c > 1$ vagy $c = \infty \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ div. 3

$\boxed{8}$ b1.) $\sum a_n$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n+2} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^2 \to \frac{e^2}{e^3} \cdot 1^2 = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv.

$\boxed{4}$ b2.) $\sum b_n$

$$b_n = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \ne 0 \Rightarrow \sum^{\infty} b_n \text{ div.}$$

(nem teljesül a szükes. felt.)

an2 zh1060316/4.

**8. feladat (7+9=16 pont)**

Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3n+1)\,(n+1)!}$$

Ha igen, adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \; 1 = \frac{2^{n+1}(3n+1)(n+1)!}{(3n+4)(n+2)!\;2^n} \; 2 = 2\,\underbrace{\frac{3n+1}{3n+4}}\,\frac{1}{n+2} \longrightarrow 0 < 1$$

$$\frac{1}{n+2} \to 0 \quad 2$$

$$\frac{3n+1}{3n+4} = \frac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}} \to 1$$

$$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ konv. } 2$$

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{2^n}{(3n+1)(n+1)!} < \frac{1}{304}\sum_{n=101}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!} =$$

1 2

$$= \frac{1}{304}\left(\frac{2^{101}}{102!} + \frac{2^{102}}{103!} + \frac{2^{103}}{104!} + \dots\right) = \frac{1}{304}\,\frac{2^{101}}{102!}\left(1 + \underbrace{\frac{2}{103}}_{:=q} + \frac{2^2}{103\cdot 104} + \dots\right) <$$

$$(0<q<1)$$

$$< \frac{1}{304}\,\frac{2^{101}}{102!}\left(1+q+q^2+\dots\right) = \frac{1}{304}\,\frac{2^{101}}{102!}\,\frac{1}{1-\frac{2}{103}} \quad 6$$

*Pótfeladat (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):*

**9. feladat (10 pont)**

Adja meg a differenciálegyenlet általános megoldását! (Fejezze ki $y$-ra!)

$$y' - 3(\cos 2x)\,y = \cos 2x$$

Oldja meg az $y(0) = 1$ kezdeti érték problémát!

Megoldható szeparábilisként és lineáris elsőrendűként is.

Szeparábilisként:

$y' = \cos 2x\,(3y+1)$ ; $y \equiv -\frac{1}{3}$ megoldás

$\frac{1}{3}\int \frac{3}{3y+1}\,dy = \int \cos 2x\,dx \implies \frac{1}{3}\ln|3y+1| = \frac{\sin 2x}{2} + C_1$

$\implies \ln|3y+1| = \frac{3}{2}\sin 2x + C_2 \implies |3y+1| = e^{C_2}\, e^{\frac{3}{2}\sin 2x}$

$\implies 3y+1 = \pm e^{C_2}\, e^{\frac{3}{2}\sin 2x} \implies y = -\frac{1}{3} \pm \frac{e^{C_2}}{3}\, e^{\frac{3}{2}\sin 2x}$ ill. $y \equiv -\frac{1}{3}$

Tehát $y = -\frac{1}{3} + C\, e^{\frac{3}{2}\sin 2x}$ ; $C \in \mathbb{R}$

$y(0) = 1$ : $1 = -\frac{1}{3} + C \implies C = \frac{4}{3}$

$y = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\, e^{\frac{3}{2}\sin 2x}$