ANALIZIS(1) I. Zárthelyi. α variáns 2006 okt. 19.

Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc

BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1) Feladat (10 pont).

2 a) Mikor mondjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$?

8 b) A definíció alapján igazolja, hogy az alábbi sorozatnak van határértéke:

$$a_n = \frac{3n+5}{n+3}$$

2) Feladat (10 pont). +1

6 $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^{n+4} + 1}{2^{n+2} + 3^{n+1} - 2} = ?$$

5 $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-4}\right)^{2n^3} = ?$$

3) Feladat (10 pont).

2 a) Írja le a sorozatokra vonatkozó rendőrelvet!

8 b) Határozza meg az alábbi sorozat limeszét:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{5n+1}{2n+3}}$$

4) Feladat (08 pont). +1

Határozza meg az alábbi sorozat limesz szuperiorját és a limesz inferiorját:

$$a_n = \frac{n^5 \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{n}}{4n^5 + n^2 + 6}$$

5) Feladat (13 pont). +1

Legyen

$$a_{n+1} = 10 - \frac{16}{a_n}, \qquad a_1 = 32\,; \qquad (a_n) = (32,\ 9.5\,,\ 8.32\,,\cdots)$$

rekurzíve adott sorozat. Mutassa meg, hogy

4 a) $8 < a_n$, minden $n \in \mathbb{N}$,

4 b) (a_n) monoton.

2 c) Indokolja meg, hogy (a_n) konvergens.

4 d) Határozza meg az (a_n) határértékét!

6) Feladat (17 pont).

Abszolút vagy feltételesen konvergens-e az alábbi sor: 8 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{1+n\,5^n}$$

7) Feladat (15 pont). 9 6

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sor konvergens és becsüljük meg azt a hibát, amit akkor vétünk, ha a sor összegét a nyolcadik részletösszeggel közelítjük:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+2}}{4^n + 6^n}$$

8) Feladat (07 pont).

4 a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x+5}{x^3+x+3} = ?$ 3 b) $\lim_{x\to\infty} \{x\} \cdot \dfrac{x^2+3x+5}{x^3+x+3} = ?$

9) Feladat (10 pont).

2 a) Mikor mondjuk, hogy $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, ha feltesszük, hogy x_0 az értelmezési tartomány torlódási pontja?

8 b) Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{3x-5} = 2$$

[[10]]

1, a, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

[2] $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$. (2)

[8] b, $a_n = \frac{3n+5}{n+3} = \frac{3+\frac{5}{n}}{1+\frac{3}{n}} \longrightarrow 3$ (2) Sejtés: $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

$\varepsilon > 0$ adott.

$|a_n - A| = \left|\frac{3n+5}{n+3} - 3\right| \underset{(1)}{=} \left|\frac{3n+5-3(n+3)}{n+3}\right| \underset{(1)}{=} \frac{|-4|}{n+3} \underset{(1)}{=} \frac{4}{n+3} \underset{(1)}{<}$

$< \frac{4}{n} \underset{(1)}{<} \varepsilon$, ha $n > \frac{4}{\varepsilon}$, tehát $N(\varepsilon) = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right]$ (1) megfelel.

2, a, [10+1p]

[6] $\frac{(-2)^n + 3^{n+4} + 1}{2^{n+2} + 3^{n+1} - 2} = \frac{(-2)^n + 81\cdot 3^n + 1}{4\cdot 2^n + 3\cdot 3^n - 2}$ (1) $=$

$= \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 81 + \frac{1}{3^n}}{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3 - \frac{2}{3^n}}$ (1) (2) (1) $\xrightarrow{n\to\infty} \frac{81}{3} = \underline{\underline{27}}$ (1)

Felhasználtuk, hogy $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, ha $|q| < 1$.

[5] b, $\left(\frac{n^3+1}{n^3-4}\right)^{2n^3} = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}}{\left(1-\frac{4}{n^3}\right)^{n^3}}\right)^2$ (2) $\longrightarrow \left(\frac{e^1}{e^{-4}}\right)^2$ (1) (1) $= \underline{\underline{e^{10}}}$ (1)

Felhasználtuk, hogy

$\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3} \longrightarrow e^1 = e$, mert $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ részsorozata, ill.

$\left(1-\frac{4}{n^3}\right)^{n^3} \longrightarrow e^{-4}$, mert $\left(1-\frac{4}{k}\right)^k$ részsorozata.

---

[10]

3, a, Sorozatokra vonatkozó rendőr-elv:

[2] Ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $b_n \le a_n \le c_n$, (*) és

$\lim_{n\to\infty} b_n = A$, $\lim_{n\to\infty} c_n = A$,

akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Megj.: ($\forall n \in \mathbb{N}$) helyett elég, ha $\forall n > N_0 \in \mathbb{N}$ esetén teljesül (*).

[8] b, Legyen $b_n = \frac{5n+1}{2n+3}$.

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{5}{2} = 2,5$, (2) tehát

$2 < b_n < 3$, (2) ha $n > N_0$; $N_0 \in \mathbb{N}$.

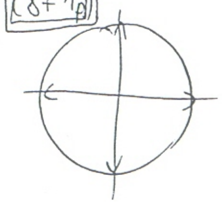
Így

$\sqrt[n]{2} < \sqrt[n]{b_n} = a_n < \sqrt[n]{3}$ (2)

$\sqrt[n]{2} \to 1$, $\sqrt[n]{3} \to 1$ (1)

A rendőr-elv értelmében $\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}}$ (1)

4, [8+1p]



$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k \\ +1, & \text{ha } n = 4k+1 \\ -1, & \text{ha } n = 4k-1 \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$. (1p)

Bontsuk fel az a_n sorozatot három részsorozatra:

i, Ha $n = 2k$;

$a_n = \frac{0+\sqrt{n}}{4n^5+n^2+6}$ (1) $\longrightarrow 0$ (1)

ii, Ha $n = 4k+1$

$$a_n = \frac{+1 \cdot n^5 + \sqrt{n}}{4n^5 + n^2 + 6} \longrightarrow \frac{1}{4} \quad (2)$$

iii, Ha $n = 4k-1$

$$a_n = \frac{-1 \cdot n^5 + \sqrt{n}}{4n^5 + n^2 + 6} \longrightarrow -\frac{1}{4} \quad (2)$$

Mindhárom részsorozat konvergens, tehát pontosan egy torlódási pontjuk van; a határértékük.

Az a_n összefésült sorozat torlódási pontjai tehát

$$S = \{0, +\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}\}, \text{ tehát}$$

$\underline{\lim}\, a_n = -\frac{1}{4}$ (1); $\overline{\lim}\, a_n = +\frac{1}{4}$ (1)

5, $\boxed{13+1}$ $a_1 = 32$; $a_{n+1} = 10 - \frac{16}{a_n}$; $(a_n) = 32; 9,5; 8,32; \ldots$

a, Teljes indukcióval bizonyítunk:

$\boxed{4}$ α, $a_1 = 32 > 8$ ✓

β, T.f.h. $a_n > 8$

γ, $a_{n+1} = 10 - \frac{16}{a_n} > 10 - \frac{16}{8} = 10 - 2 = 8$ ✓

b, Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $a_n \searrow$

$\boxed{4}$ α, $a_1 = 32 > a_2 = 9,5 > a_3 = 8,32$

β, T.f.h. $0 < a_n < a_{n+1}$

γ, Ekkor $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n+1}}$; $\frac{-16}{a_n} < \frac{-16}{a_{n+1}}$; $\underbrace{10 - \frac{16}{a_n}}_{a_{n+1}} < \underbrace{10 - \frac{16}{a_{n+1}}}_{a_{n+2}}$

5, c, d.

$\boxed{2}$ Láttuk, hogy a_n alulról korlátos ($a_n > 8$), és monoton csökken, ez azt jelenti, hogy konvergens.

d, a_n határértéke kielégíti a rekurziós egyenletet:

$\boxed{4}$

$$A = 10 - \frac{16}{A} \quad (2)$$

$$A^2 - 10A + 16 = (A-8)(A-2) = 0$$

(1) $\begin{cases} A_1 = 8 \leftarrow \text{helyes gyök} \\ A_2 = 2 \text{ nem lehet a határérték, mert } a_n > 8 \end{cases}$ (1)

Tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$.

6, $\boxed{17}$ a, Feltételes konvergencia: $a_n = (-1)^n \frac{5^n}{1 + n5^n}$

$\boxed{3}$ A sor Leibniz-sor, mert i, váltakozó előjelű ✓ (1)

ii, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{1+n5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{5^n} + n} = 0$ (3)

ii, Belátjuk, hogy $|a_n|$ monoton csökken:

$$|a_{n+1}| = \frac{5^{n+1}}{1+(n+1)5^{n+1}} \overset{?}{<} |a_n| = \frac{5^n}{1+5^n} \quad (1)$$

$$(1+5^n)5^{n+1} \overset{?}{<} 5^n(1+(n+1)5^{n+1})$$

$$5^{n+1} + \cancel{5^{2n+1}} \overset{?}{<} 5^n + (n+\cancel{1})5^{2n+1}$$

$$5 \overset{?}{<} 1 + n5^{n+1} \quad \checkmark \text{ Teljesül, ha } n \geq 1 \quad (2)$$

Ez azt jelenti, hogy a sor Leibniz-típusú, tehát konvergens. (2)

b, Abszolút konvergencia

8 nagy n esetén $|a_n| = \frac{5^n}{1+n5^n} \sim \frac{1}{n}$, és $\sum \frac{1}{n} = \infty$,

azt sejtjük, hogy divergens $\sum |a_n|$

$$|a_n| = \frac{5^n}{1+n5^n} \underset{2}{\geq} \frac{5^n}{n5^n+n5^n} \underset{2}{=} \frac{1}{2n}, \quad \text{és}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty$, 2 tehát a minoráns kritérium

alapján $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$. 2

Tehát a vizsgált sor nem abszolút konvergens, de feltételesen konvergens.

7, 15

9 $0 < a_n = \frac{2^n+3^{n+2}}{4^n+6^n} = \frac{2^n+9\cdot 3^n}{4^n+6^n} \underset{1}{\leq} \frac{3^n+9\cdot 3^n}{6^n} \; 2 =$

$= 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 1, és $\sum_{n=1}^{\infty} 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$ 2 (konvergens geometriai sor, $q = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$)

Tehát a majoráns kritérium alapján 2

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens. 1

6 $H = |S - S_8| = |R_8| = R_8 = \sum_{n=9}^{\infty} a_n$ 1 $\leq \sum_{n=9}^{\infty} 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 2 $= \frac{10}{2^9} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ 2 $=$

poz. tagú sor

$= \frac{10}{2^8}$ 1

8, 7 a,

4 $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+5}{x^3+x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{x+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = 0$. 1 3

3 b,

$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\{x\}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{\frac{x^2+3x+5}{x^3+x+3}}_{\to 0} = 0$ 2 1

9, 10 a,

2 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x \in \underbrace{\dot{K}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)}_{(x_0-\delta(\varepsilon),\, x_0+\delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}} \cap D_f$

8 b, $\varepsilon > 0$ adott.

$$\left|\sqrt{3x-5} - 2\right| \underset{1}{=} \left|\frac{3x-5-4}{\sqrt{3x-5}+2}\right| \overset{2}{=} \frac{3\cdot|x-3|}{\sqrt{3x-5}+2} \overset{1}{\leq} \frac{3}{2}|x-3| < \varepsilon, \; 2$$

ha $|x-3| < \frac{2}{3}\varepsilon$, tehát $\delta(\varepsilon) = \frac{2}{3}\varepsilon$ 2 megfelel.