VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (2)

# Komplex függvénytan

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné

Kónya Ilona

2005. április

Szerkesztette: Győri Sándor

# 1. Bevezetés

Komplex szám fogalma: ...

Algebrai (kanonikus) alak: $z = x + j\,y$

$$x = \operatorname{Re} z\,, \quad y = \operatorname{Im} z\,, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad |z|^2 = z\overline{z}$$

Trigonometrikus alak: $z = r\,(\cos\varphi + j\,\sin\varphi)$

$$r = |z|\,, \quad \varphi = \operatorname{arc} z \quad (\text{főérték: } -\pi \le \varphi < \pi\,)$$

Exponenciális alak: $z = r\,\mathrm{e}^{j\varphi}$

Műveletek komplex számok körében: ...

**$\infty$ szimbólum, mint komplex szám:**

$$\begin{aligned}
z + \infty &= \infty \\
\infty \cdot z &= \infty\,, \quad \text{ha} \quad z \ne 0 \\
\frac{\infty}{z} &= \infty\,, \quad \text{ha} \quad z \ne \infty \\
\frac{z}{0} &= \infty\,, \quad \text{ha} \quad z \ne 0 \\
\frac{z}{\infty} &= 0\,, \quad\ \ \text{ha} \quad z \ne \infty
\end{aligned}$$

De

$$0 \cdot \infty = ?\,, \quad \frac{\infty}{\infty} = ?\,, \quad \frac{0}{0} = ?$$

Ábrázolás:

$\mathbb{C}$ : Gauss-féle számsík ...

$\mathbb{C}^\infty$ : Riemann-féle számgömb ...

# 2. Komplex tagú számsorozatok, számsorok

## Számsorozatok

Ⓓ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ :

$$\forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, N(\varepsilon)\ :\quad |z_n - z_0| < \varepsilon\,,\ \text{ha } n > N(\varepsilon)$$

Ⓓ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty\,, \quad \text{ha} \quad |z_n| \to \infty$

Ⓣ $(z_n = x_n + j\,y_n \longrightarrow z_0 = x_0 + j\,y_0 \neq \infty) \quad \Longleftrightarrow \quad ((x_n \to x_0) \wedge (y_n \to y_0))$

Ⓣ $(z_n \to z_0) \quad \Longleftrightarrow \quad (z_n)$ Cauchy sorozat

Most is igaz:

$$\lim_{n\to\infty} z_0^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |z_0| < 1, \\ 1, & \text{ha } z_0 = 1, \\ \text{divergens egyébként.} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + z_0 + z_0^2 + \cdots + z_0^{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_0^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} z_0^{k-1} = \frac{1}{1-z_0}\,, \quad \text{ha} \quad |z_0| < 1\,.$$

Egyébként divergens.

## Számsorok

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ : $\qquad s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k$

Ⓓ $\quad s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

$$\left( z_k = x_k + j\,y_k \quad \text{esetén} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x_k \text{ konvergens}\ , \quad \sum_{k=0}^{\infty} y_k \text{ konvergens} \right)$$

Ⓣ Cauchy kritérium igaz $\quad\ldots$

Ⓣ $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergens $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

Ⓣ $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergens

# 3. Komplex változós függvények

$$w = f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y) = \rho(r,\varphi)\,\mathrm{e}^{j\,\theta(r,\varphi)}$$

(Pl.) $f(z) = z^2 = (x + j\,y)^2 = x^2 - y^2 + j\,2xy = r^2\,\mathrm{e}^{j\,2\varphi}$ (Kétrétű leképezés)

Ⓓ Legyen $z_0$ $D_f$ belső pontja!

$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ , ha $\forall\,\varepsilon > 0$ - hoz $\exists\,\delta(\varepsilon) > 0$ :

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon\,, \quad 0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$$

Ⓣ $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ $\Longleftrightarrow$ $\forall\, z_n \to z_0$ - ra $(z_n \in D_f\,,\ z_n \neq z_0)$ $f(z_n) \to w_0$

Ⓣ $z_0 = x_0 + j\,y_0$ , $w_0 = u_0 + j\,v_0$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad \text{és} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

Ⓓ Az $f$ függvény folytonos az értelmezési tartomány $z_0$ belső pontjában, ha

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

# 4. Deriválhatóság, regularitás

(D) Legyen $z_0$ $D_f$ belső pontja! $f$ differenciálható $z_0$-ban, ha létezik

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) = D \in \mathbb{C}$$

$$D = D_1 + j\, D_2$$

(Pl.) $f(z) = z^3$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^3 - z_0^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{3\, z_0^2\, \Delta z + 3\, z_0\, (\Delta z)^2 + (\Delta z)^3}{\Delta z} = 3\, z_0^2$$

(Pl.) $f(z) = \overline{z}$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \mathrm{e}^{-j\, 2\, \mathrm{arc}\, \Delta z} = \nexists$$

(Ugyanis függ a határérték $\varphi = \mathrm{arc}\, \Delta z$ értékétől.)

(T) A valós függvényekre tanult differenciálási szabályok, - beleértve az összetett és az inverzfüggvényre vonatkozó differenciálási szabályokat is -, érvényesek a komplex változós függvényekre is.

(T) Szükséges és elégséges tétel differenciálhatóságra:
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ akkor és csak akkor differenciálható az értelmezési tartomány belső $z_0$ pontjában, ha

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = D \cdot \Delta z + \varepsilon(\Delta z) \cdot \Delta z\,,$$

ahol $D$ független $\Delta z$- től , $\varepsilon(\Delta z) = \varepsilon_1(\Delta z) + j\, \varepsilon_2\, (\Delta z)$, $\Delta z = \Delta x + j\, \Delta y$ és $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$

(T) $f$ differenciálható $z_0$-ban $\Longrightarrow$ $f$ folytonos $z_0$-ban

Ⓣ Szükséges és elégséges tétel differenciálhatóságra:

Az $f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$ komplex függvény akkor és csak akkor differenciálható az értelmezési tartomány $z_0 = x_0 + jy_0$ belső pontjában, ha $u$ és $v$ totálisan deriválható $(x_0, y_0)$-ban és ugyanitt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{Cauchy–Riemann féle parciális differenciálegyenletek}$$

fennállnak. Ekkor

$$f'(z_0) = u'_x|_{(x_0,y_0)} + j\ v'_x|_{(x_0,y_0)}$$

Ⓑ

$$\Delta f = f(z) - f(z_0) = D \cdot (z - z_0) + \varepsilon \cdot (z - z_0); \qquad \lim_{z \to z_0} \varepsilon = 0$$

$$z - z_0 = \Delta z = (x - x_0) + j\,(y - y_0) = \Delta x + j\,\Delta y$$

Mindkét oldalt felírjuk algebrai alakban:
Bal oldal:

$$\Delta f = \{u(x,y) - u(x_0,y_0)\} + j\ \{v(x,y) - v(x_0,y_0)\}$$

Jobb oldal:

$$(D_1 + j\,D_2)(\Delta x + j\,\Delta y) + (\varepsilon_1 + j\,\varepsilon_2)(\Delta x + j\,\Delta y) =$$

$$= \{D_1\,\Delta x - D_2\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x - \varepsilon_2\,\Delta y\} + j\ \{D_2\,\Delta x + D_1\,\Delta y + \varepsilon_2\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta y\}$$

Az egyeztetésből:

$$\Delta u = u(x,y) - u(x_0,y_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ u'_x}}{D_1}\ \Delta x + \underset{\substack{\uparrow \\ u'_y}}{(-D_2)}\ \Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + (-\varepsilon_2)\,\Delta y$$

$$\Delta v = v(x,y) - v(x_0,y_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ v'_x}}{D_2}\ \Delta x + \underset{\substack{\uparrow \\ v'_y}}{D_1}\ \Delta y + \varepsilon_2\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta y$$

Tehát $u$-nak és $v$-nek totálisan deriválhatónak kell lenni $(x_0, y_0)$-ban és

$$u'_x\ =\ D_1\ =\ v'_y; \qquad -u'_y\ =\ D_2\ =\ v'_x.$$

Vagyis

$$f'(z_0) = D_1 + jD_2 = u'_x(x_0,y_0) + j\ v'_x(x_0,y_0).$$

(A bizonyítás gondolatmenete megfordítható. Így visszafelé is igaz.) ■

Ⓜ A Cauchy-Riemann egyenletek miatt további három képletünk is van:

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) = D_1 + j\,D_2 &= u'_x(x_0,y_0) + j\,\left(-u'_y(x_0,y_0)\right) = \\
&= v'_y(x_0,y_0) + j\,\left(-u'_y(x_0,y_0)\right) = \\
&= v'_y(x_0,y_0) + j\,v'_x(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

(T) Elégséges tétel $f'(z_0)$ létezésére:

– Ha $u$ és $v$ parciális deriváltjai léteznek $K_{(x_0,y_0)}$-ban és itt folytonosak

– és a C–R egyenletek teljesülnek $(x_0,y_0)$-ban, akkor $\exists\ f'(z_0)$.

(D) $f$ reguláris $z_0$-ban, ha $\exists\ \delta > 0$, hogy $f$ differenciálható $K_{z_0,\delta}$-ban.

(D) $f$ reguláris a $T$ tartományon (összefüggő és nyílt ponthalmaz), ha minden pontjában reguláris.

(Pl.) $f(z) = z^2 = (x+jy)^2 = x^2 - y^2 + j\,2xy$

$$
\left.\begin{aligned}
u(x,y) &= x^2 - y^2 \\[1ex]
v(x,y) &= 2xy
\end{aligned}\right\}\ \text{parciális deriváltak mindenütt léteznek és folytonosak}
$$

$u'_x = 2x\ ;\quad u'_y = -2y\ ,\quad v'_x = 2y\ ,\quad v'_y = 2y$

Így az $u'_x = v'_y\ ,\ u'_y = -v'_x$ Cauchy-Riemann egyenletek mindenütt teljesülnek
$\Longrightarrow$ $f$ mindenütt deriválható $\Longrightarrow$ $f$ mindenütt reguláris.

És $f'(z) = u'_x + j\,v'_x = 2x + j\,2y\ (=\ 2z)$

(Pl.) $f(z) = \overline{z}\,z^2 = (\overline{z}\,z)\,z = |z|^2\,z = (x^2+y^2)\,(x+jy) = (x^3+xy^2) + j\,(x^2y+y^3)$
Így

$u(x,y) = x^3 + xy^2\ ,\qquad v(x,y) = x^2y + y^3$

$u$ és $v$ parciális deriváltjai mindenütt léteznek és folytonosak

$u'_x = 3x^2 + y^2\ ,\quad v'_y = x^2 + 3y^2\ ;\qquad u'_x = v'_y\ :\quad 2x^2 = 2y^2 \quad\longrightarrow\quad |x| = |y|$

$u'_y = 2xy\ ,\quad v'_x = 2xy\ ;\qquad u'_y = -v'_x\ :\quad xy = 0 \quad\longrightarrow\quad x = 0$ vagy $y = 0$

Mindkét feltétel teljesül, ha

$(\,|x| = |y|\,)\ \cap\ (\,x = 0\ \cup\ y = 0\,)\quad\Longrightarrow\quad$ $f$ csak $z = 0$-ban deriválható.
Így sehol sem reguláris.

•••

(D) Harmonikus függvény

$g \in C^2_H$ harmonikus $H$-n, ha kielégíti a
$$\Delta g = 0$$
Laplace-féle parciális differenciálegyenletet.

$$(g''_{x_1x_1} + g''_{x_2x_2} + \cdots + g''_{x_mx_m} = 0, \quad \text{kétváltozósra:} \quad g''_{xx} + g''_{yy} = 0)$$

(T) Ha $f = u + jv$ reguláris $K_{z_0,\delta}$-ban (vagy egy $T$ tartományban), akkor ott valós és képzetes része harmonikus függvény.

(B) $f(z) = u + jv$

$$u'_x = v'_y \qquad (1)$$
$$u'_y = -v'_x \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(1): \quad u''_{xx} = v''_{yx} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial y}(1): \quad u''_{xy} = v''_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2): \quad u''_{yy} = -v''_{xy} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x}(2): \quad u''_{yx} = -v''_{xx}$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad -$$

$$\Delta u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta v = 0$$

Felhasználtuk, hogy a regularitás miatt $f$ (és így $u$ és $v$ is) akárhányszor differenciálható, amit később bizonyítunk.

(D) Ha $f(z) = u + jv$ reguláris $K_{z_0,\delta}$-ban, akkor $u$-nak $v$ *harmonikus társa*

(T) Ha $u$ harmonikus $K_{z_0,\delta}$-ban ($\Delta u = 0$, $x + jy \in K_{z_0,\delta}$), akkor $\exists\, v$ harmonikus függvény (harmonikus társ) úgy, hogy
$$f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$$
reguláris függvény. (¬B)

(M1) A tétel egyszeresen összefüggő tartományban is igaz.

(M2) Hasonlóan $v$-hez is $\exists\, u \ldots$

(Pl.) Határozzuk meg $\alpha \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az
$$u(x,y) = x^2 + \alpha\, y^2$$
egy reguláris komplex változós $f$ függvény valós része legyen! $f'(1+3j) = ?$

*Megoldás*:

Ha $f$ reguláris, akkor $u$ harmonikus. Tehát $\Delta u \equiv 0$-nak kell teljesülnie!

$$u'_x = 2x\ , \quad u''_{xx} = 2\ , \quad u'_y = 2\,\alpha\,y\ , \quad u''_{yy} = 2\,\alpha$$

Tehát

$$u''_{xx} + u''_{yy} \;=\; 2 + 2\,\alpha \;=\; 0 \quad\longrightarrow\quad \alpha = -1\,,\ \text{vagyis}\quad u(x,y) = x^2 - y^2$$

$f'$ meghatározásához elegendő $u$ ismerete, hiszen van olyan képletünk, melyben csak $u$ parciálisai szerepelnek:

$$f'(1+3j) \;=\; u'_x(1,3) - j\,u'_y(1,3) \;=\; 2 - j(-6) = 2 + j6$$

(Pl.) Igazolja, hogy

$$v(x,y) = x^3 - x^2 - 3x\,y^2 + y^2$$

függvény egy reguláris $f$ komplex változós függvény képzetes része lehet és írja fel az $f$ függvényt!

*Megoldás*:

$v$ harmonikusságát kell ellenőriznünk!

$$v'_x = 3x^2 - 2x - 3y^2\ , \quad v''_{xx} = 6x - 2\ , \qquad v'_y = -6xy + 2y\ , \quad v''_{yy} = -6x + 2$$

Tehát $\Delta v \equiv 0$ , $v$ mindenütt harmonikus. Így létezik harmonikus társa. A két függvényt a Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenletek kapcsolják össze, vagyis

$$u'_x = v'_y = -6xy + 2y \qquad (1)$$
$$u'_y = -v'_x = -3x^2 + 2x + 3y^2 \qquad (2)$$

(1)-ből:

$$u(x,y) = \int(-6xy + 2y)\,\mathrm{d}x \;=\; -3x^2\,y + 2xy + C(y)$$

Ennek $y$ szerinti parciális deriváltját behelyettesítve (2)-be:

$$-\,3x^2 + 2x + C'(y) \;=\; -3x^2 + 2x + 3y^2 \quad\longrightarrow\quad c'(y) = 3y^2 \quad\longrightarrow\quad C(y) = y^3 + K$$

Tehát

$$u(x,y) = -3x^2\,y + 2xy + y^3 + K \qquad (K \in \mathbb{R})\ ,$$

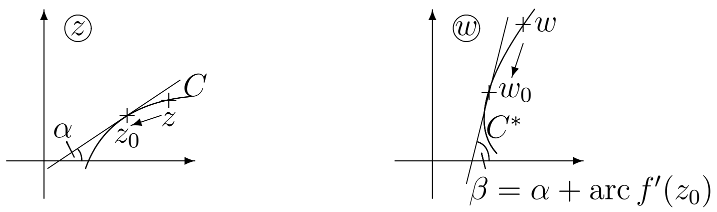
így a keresett $f$ függvény

$$f(z) = -3x^2\,y + 2xy + y^3 + K + j\ (x^3 - x^2 - 3x\,y^2 + y^2)$$

# 5. A differenciálhányados geometriai jelentése
**(64. oldal)**

| |
|---|
| Legyen $f$ differenciálható $K_{z_0}$-ban, $f'(z_0) \neq 0$. Ekkor<br>$\lvert f'(z_0)\rvert$ : a $z_0$ pontbeli nyújtási együttható;<br>$\operatorname{arc} f'(z_0)$ : a $z_0$ pontbeli elfordulási szög. |

(B) $w = f(z)$

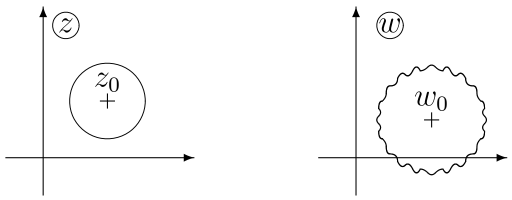



$\Delta w \approx f'(z_0)\Delta z$ (=differenciál) $\quad (\Delta w = w - w_0,\ \Delta z = z - z_0)$

Ezért $|\Delta w| \approx |f'(z_0)|\,|\Delta z|$

$$\frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} = \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \approx |f'(z_0)|,$$

tehát közelítőleg állandó, vagyis független a konkrét $C$-től.




Tehát egy elegendően kis sugarú kör képe ,,lényegében kör”.

Másrészt $\Delta w \approx f'(z_0)\Delta z$ miatt:

$$\operatorname{arc}\Delta w \approx \operatorname{arc} f'(z_0) + \operatorname{arc}\Delta z$$

Ha $z \to z_0$, akkor $w \to w_0$ és

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{arc}\Delta z = \alpha$$

$$\lim_{w \to w_0} \operatorname{arc}\Delta w = \beta$$

Tehát

$$\lim_{w \to w_0} \operatorname{arc}\Delta w = \beta = \operatorname{arc} f'(z_0) + \alpha$$

Vagyis az elfordulás minden, a $z_0$ ponton átmenő görbére ugyanaz.

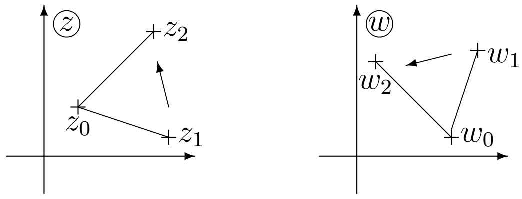
# 6. Konform (konformis) leképezés (106. oldal)

(„A formát változatlanul megtartó”)

D Az $f$ komplex függvény által létesített leképezés a $z_0$ pontban lokálisan konform, ha ott

a.) iránytartóan szögtartó

b.) kismértékben aránytartó




Vagyis $z_2 z_0 z_1 \measuredangle = w_2 w_0 w_1 \measuredangle$ és

$$\frac{|w_2 - w_0|}{|z_2 - z_0|} \approx \frac{|w_1 - w_0|}{|z_1 - z_0|}$$

„Lényegében” hasonlósági transzformáció.

T Az $f$ reguláris komplex függvény akkor és csak akkor képezi le a $z$ sík valamely $z_0$ pontjának egy környezetét a $w$ sík $w_0 = f(z_0)$ pontjának egy környezetére kölcsönösen egyértelműen és konformisan, ha $f'(z_0) \neq 0$.

## 6.1. Tartományok konform leképezése (109. oldal)

D Az $f$ komplex függvény által létesített leképezés a $T$ (nyílt) tartományon konform, ha annak minden pontjában konform.

T 2.2.1 A tartomány megmaradásának elve

Ha az $f \not\equiv$ konstans komplex függvény reguláris, akkor a nyílt tartomány képe nyílt tartomány. (Határpontokat határpontokba visz.)

T 2.2.2

Ha az $f$ komplex függvény egy $T$ tartományon egyrétű, reguláris és $f'(z) \neq 0$, akkor a $T$ tartományt kölcsönösen egyértelműen és konform módon képezi le egy $T^*$ tartományra.

Az előzőek megfordítása:
Ha $T$ és $T^*$ egyszeresen összefüggő tartományok, akkor $\exists\, f(z)$, mely kölcsönösen egyértelműen és konformisan leképezi $T$-t $T^*$-ra.

T 2.2.6 (Kerületek irányítása)

A $T$ és $T^*$ tartományok kölcsönösen egyértelmű és konform leképezésénél kerületeik körüljárási iránya változatlan marad. Ennek következménye: hogy ha a $T$ tartomány kerületének körüljárásánál a tartomány pl. balkéz felé esik, akkor a $T^*$ képtartomány kerületének azonos irányú körüljárásánál $T^*$ is balkéz felé esik.

# 7. Lineáris leképezések (116. oldal)

$$\left( w = az + b; \quad w = \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

*Egyenes komplex egyenlete:*

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \qquad\qquad x = \frac{z+\overline{z}}{2}; \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2j}$$

Behelyettesítve:

$$\frac{\alpha}{2}(z+\overline{z}) + \frac{\beta}{2j}(z-\overline{z}) + \gamma = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{\alpha}{2} - j\frac{\beta}{2}\right)}_{:=a} z + \left(\frac{\alpha}{2} + j\frac{\beta}{2}\right)\overline{z} + \gamma = 0$$

Így az egyenes komplex egyenlete:

$$\boxed{az + \overline{a}\,\overline{z} + c = 0 \quad \text{vagy} \quad az + \overline{a}\,\overline{z} = c}$$

*Kör komplex egyenlete:*

$$|z-z_0|^2 = r^2 \qquad \big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\big)$$

$$(z-z_0)\overline{(z-z_0)} = r^2$$

$$\boxed{z\overline{z} - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} - r^2 = 0} \quad z_0 \text{ középpontú, } r \text{ sugarú kör egyenlete}$$

## 7.1. Lineáris egész függvény

$$w = az + b = \varrho_0\, r\, \mathrm{e}^{j(\varphi+\varphi_0)} + b \qquad a, b \in \mathbb{C} \text{ adott}, \ a = \varrho_0\, \mathrm{e}^{j\varphi_0}$$

1.) *Kölcsönösen egyértelmű a teljes $z$ és a teljes $w$ sík között.*

$(w(\infty) = \infty)$

2.) *Hasonlósági transzformációt létesít a teljes $z$ síkon.*

Ui.: $az = \varrho_0 r \mathrm{e}^{j(\varphi+\varphi_0)}$ $\begin{cases} \text{– nyújtás vagy zsugorítás } (\varrho_0) \\ \text{– forgatás } (\varphi_0 \ \circlearrowleft) \end{cases}$

$+b$ – eltolás

szuperpozíciója. Tehát a $z$ sík bármely $T$ tartományát a $w$ sík egy hozzá hasonló $T^*$ tartományára képezi le, amely a $T$-ből nagyítással (vagy kicsinyítéssel), elforgatással és párhuzamos eltolással jön létre.

3.) *A leképezés körtartó a teljes z síkon.*

A fentiek miatt kört körbe, egyenest egyenesbe visz át.

4.) *A leképezés konform a teljes z síkon.*

$w' = a \neq 0 \implies$ mindenütt konform.

5.) *A leképezés fix* (helyben maradó) *pontjai:*

$z = \infty$ , illetve ($z = az + b$-ből:) $z = \dfrac{b}{1-a}$, ha $a \neq 1$.

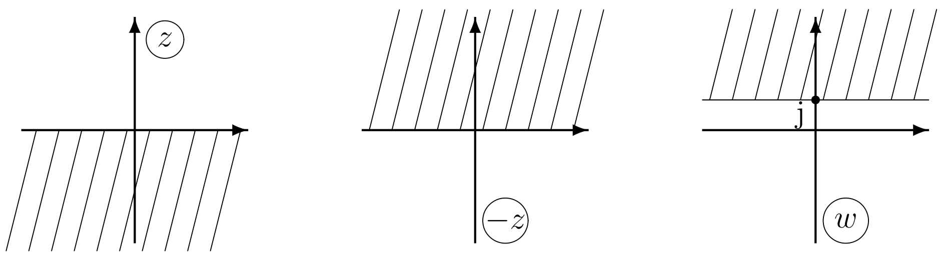
Pl.

| |
|---|
| $w = -z + 1 + j$<br>Mibe viszi át a leképezés az<br>a.) $Im\, z < 0$     b.) $Im\, z = 0$     c.) $Im\, z > 0$<br>ponthalmazt? |

a.)

1. megoldás:

$Im\, z = y < 0$     $-z = e^{j\pi} \cdot z$     $Im\, w > 1$



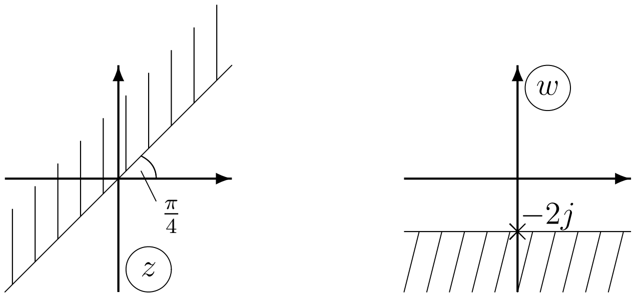

2. megoldás:

$$w = u + jv = -(x + jy) + 1 + j \longrightarrow u = -x + 1,\ v = 1 - y$$
$$Im\, z = y < 0 \longrightarrow -y > 0 \longrightarrow Im\, w = v = 1 - y > 1$$
$$x \text{ tetsz.} \longrightarrow u = -x + 1 \text{ tetsz.}$$

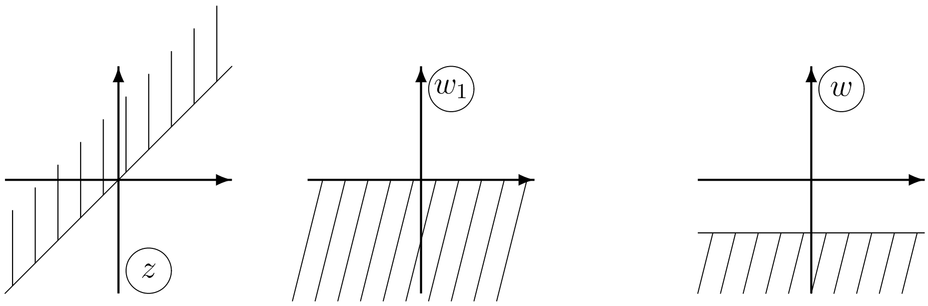
b.) $Im\, z = 0$ képe $Im\, w = 1$ (Határt határba visz.)

c.) Az előzőek miatt: $Im\, z > 0$ képe $Im\, w < 1$.

Pl. $w = az + b = ?$, hogy a $z$ sík bejelölt tartományát a $w$ sík bejelölt tartományába vigye?




Megoldás:




$$w_1 = \varrho_0 \, \mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}} \, z \quad (\varrho_0 > 0) \qquad w = w_1 - 2j$$

$$\Longrightarrow \quad w = \varrho_0 \, \mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}} \, z - 2j \qquad \varrho_0 \in \mathbb{R}^+$$

## 7.2. Reciprok függvény: $w = \dfrac{1}{z}$

1.) *Kölcsönösen egyértelmű* a teljes $z$ és a teljes $w$ sík között.
Kiterjesztés ehhez: $w(0) = \infty$, $w(\infty) = 0$.

2.) A $w = \dfrac{1}{z}$ leképezés *a* $|z| = 1$ *egységkörre és a valós tengelyre vonatkozó inverzió* (tükrözés) egymásutánja.

B $$\underbrace{w = \overline{w_1},}_{\text{inverzió a valós tengelyre}} \qquad \text{ahol} \qquad \underbrace{w_1 = \frac{1}{\overline{z}}}_{\text{inverzió a } |z|=1 \text{ körre}}$$

Az utóbbihoz:

D A $z_0$ középpontú, $R$ sugarú $K$ körre inverz pontok azok a $z$ és $\zeta$ pontok, amelyek a $K$ kör középpontjából induló valamely félegyenesen úgy helyezkednek el, hogy

$$|z - z_0| \, |\zeta - z_0| = R^2$$

A $z_0$ középpont inverze legyen: $\infty$.

A mi esetünkben:

$$w_1 = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{|z|\,\mathrm{e}^{-j\,\mathrm{arc}\,z}} = \frac{1}{|z|}\,\mathrm{e}^{j\,\mathrm{arc}\,z}$$

Tehát

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a.)} & |w_1|\,|z| = |w_1 - 0|\,|z - 0| = 1^2 \quad (z_0 = 0,\ R = 1) \\ \text{b.)} & \mathrm{arc}\,w_1 = \mathrm{arc}\,z \end{array}\right\} \text{Inverzió a } |z| = 1 \text{ körre.}$$

Az egységkör ($|z| = 1$) pontjai helyben maradnak.

3.) *A leképezés konform* a $z$ sík minden pontjában.

Ui. $w' = \left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2} \neq 0$, ha $z \neq \infty$

($z = 0$-ra is $z = \infty$-re is kiterjeszthető a fogalom.)

4.) A $w = \dfrac{1}{z}$ leképezés *„kögyenes” tartó leképezés.*

Azaz kör képe egyenes vagy kör, egyenes képe egyenes vagy kör $\Longleftrightarrow$ „kögyenes” képe „kögyenes”. Röviden „körtartó” leképezésnek nevezzük az ilyen leképezést.

B

a.) Kört körbe vagy egyenesbe visz:

$$z\overline{z} - z_0\overline{z} - \overline{z}_0 z + z_0\overline{z}_0 = r^2 \qquad w = \frac{1}{z} \longrightarrow z = \frac{1}{w}\,; \quad \overline{z} = \frac{1}{\overline{w}}$$

$$\frac{1}{w\overline{w}} - z_0\,\frac{1}{\overline{w}} - \overline{z}_0\,\frac{1}{w} + z_0\,\overline{z}_0 = r^2 \quad / \cdot w\overline{w}$$

$$1 - z_0 w - \overline{z}_0\overline{w} + z_0\overline{z}_0 w\overline{w} = r^2 w\overline{w}$$

$$\left(r^2 - z_0\overline{z}_0\right) w\overline{w} + z_0 w + \overline{z}_0\overline{w} = 1$$

Ha $r^2 - z_0\overline{z}_0 = 0$, vagyis $z\overline{z} - z_0\overline{z} - \overline{z}_0 z = 0$ volt az egyenlet, tehát origón átmenő kör:

$$z_0 w + \overline{z}_0\overline{w} = 1 \ : \qquad \text{egyenes a képgörbe}$$

Ha $r^2 - z_0\overline{z}_0 \neq 0$:

$$w\overline{w} + \underbrace{\frac{z_0}{r^2 - z_0\overline{z}_0}}_{:= c} w + \underbrace{\frac{\overline{z}_0}{r^2 - z_0\overline{z}_0}}_{= \overline{c}} \overline{w} = \frac{1}{r^2 - z_0\overline{z}_0} \ : \qquad \text{kör}$$

($r^2 - z_0\overline{z}_0$ valós)

b.) Egyenest körbe vagy egyenesbe visz:

$$az + \overline{a}\,\overline{z} = c \quad (c \text{ valós}); \qquad z = \frac{1}{w}, \quad \overline{z} = \frac{1}{\overline{w}}$$

$$a\,\frac{1}{w} + \overline{a}\,\frac{1}{\overline{w}} = c \qquad\qquad / \cdot w\overline{w}$$

$$c\,w\,\overline{w} - a\,\overline{w} - \overline{a}\,w = 0$$

Ha $c = 0$ (origón átmenő egyenes):

$$a\overline{w} + \overline{a}w = 0 \;: \qquad \text{egyenes a képgörbe (szintén origón átmenő)}$$

Ha $c \neq 0$ : mindkét oldalhoz $\dfrac{a\overline{a}}{c} = \dfrac{|a|^2}{c}$-t hozzáadva és $c$-vel végigosztva az egyenletet:

$$w\overline{w} - \frac{a}{c}\overline{w} - \frac{\overline{a}}{c}w + \frac{a\overline{a}}{c^2} = \frac{|a|^2}{c^2} \;: \qquad \text{origón átmenő kör}$$

5.) Fix pontok: $z = \dfrac{1}{z} \longrightarrow z = 1$ ill. $z = -1$

## 7.3. Általános lineáris törtfüggvény

$a, b, c, d \in \mathbb{C},\; c \neq 0$

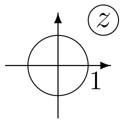
$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = K_1 + \frac{K_2}{z + K_3} \qquad \text{„körtartó” leképezés}$$

Ui.:

$w_1 = z + K_3$ : eltolás;
$w_2 = \dfrac{1}{w_1}$ : inverzió egységkörre és a valós tengelyre;
$w_3 = K_2 w_2$ : forgatás + nyújtás (zsugorítás);
$w = K_1 + w_3$ : eltolás

●●●

Pl. Határozzuk meg a $w = \dfrac{1}{z}$ leképezésnél az alábbi görbékhez rendelt képgörbék jellegét!

a.) 

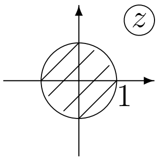

$|z| = 1$ és $w = \dfrac{1}{z}$. $\Longrightarrow$ $|w| = \dfrac{1}{|z|} = 1$ :

origó középpontú egységsugarú kör.

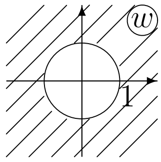
Többet mond: $w = \dfrac{1}{|z|e^{j\,\mathrm{arc}\,z}} = \dfrac{1}{|z|}\,e^{-j\,\mathrm{arc}\,z}$ : $|w| = \dfrac{1}{|z|}$; $\mathrm{arc}\,w = -\,\mathrm{arc}\,z$

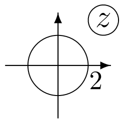
(Az utóbbi képletből látszik — amit persze tudunk —, hogy a valós tengelyre tükrözött.)

Mibe viszi át a $|z| < 1$ tartományt?

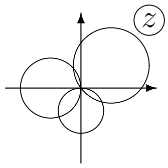



$$|w| = \frac{1}{|z|} > 1$$

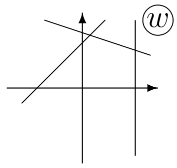



b.) 

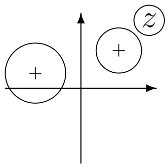

$w = \dfrac{1}{|z|}\,e^{-j\,\mathrm{arc}\,z}$ $\Longrightarrow$ $|w| = \dfrac{1}{2}$ kör (tükrözve)

c.) 

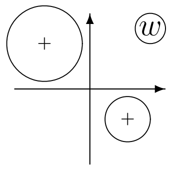

Origón átmenő kör. A képgörbe: kör vagy egyenes. Mivel $z = 0$ rajta van az ősképen, ehhez $w = \dfrac{1}{z}$ a $\infty$-t rendeli $\Longrightarrow$ képgörbe egyenes. $z = \infty$ nincs rajta az ősképen $\Longrightarrow$ az egyenes nem megy át az origón.

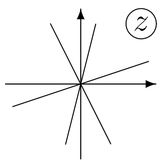



($v = mu + b$; $b \neq 0$)

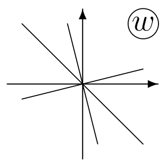
d.) 

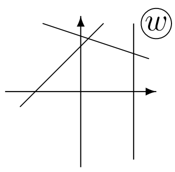

$z = 0$ nincs rajta $\Longrightarrow$ képgörbe kör
$z = \infty$ nincs rajta $\Longrightarrow$ a kör nem megy át az origón



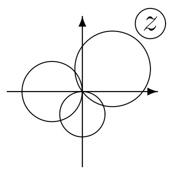

e.) 


$z = 0$ rajta van $\Longrightarrow$ egyenes ($w = \infty$ rajta van)
$z = \infty$ rajta van $\Longrightarrow$ $w = 0$ rajta van
(Nem önmagába viszi!)




f.) 


$z \neq 0$, $w \neq \infty$




Pl. $\boxed{\text{Hogyan kapható meg a } w = \dfrac{1}{z} \text{ leképezésnél a képgörbe egyenlete?}}$

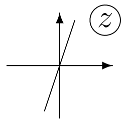
a.) $(w =)\, u + jv = \dfrac{1}{x+jy} \left(= \dfrac{1}{z}\right)$-ből $x = \dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y = \dfrac{-v}{u^2+v^2}$

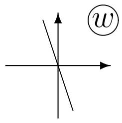
Ezt behelyettesítve az őskép egyenletébe megkapjuk a keresett egyenletet.

b.) Most kevésbé jó: a 3 pontos módszer (lásd később).

Pl. $\boxed{y = mx}$

$$\frac{-v}{u^2+v^2} = m\frac{u}{u^2+v^2} \implies v = -mu \quad \text{(Tükröződött az imaginárius tengelyre.)}$$

Pl. $y = 3x$ 

$v = -3u$ 


Pl. $\boxed{y = mx + b}$

$$\frac{-v}{u^2+v^2} = m\frac{u}{u^2+v^2} + b \quad \ldots \quad u^2 + \frac{m}{b}u + v^2 + \frac{1}{b}v = 0 \ : \qquad \text{origón átmenő kör}$$

Pl. $\boxed{x^2 + 2x + y^2 + 6y = 0}$ (Origón átmenő kör.)
Egyenest várunk, mely nem megy át az origón.
Behelyettesítve:

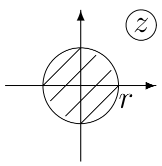
$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + 2\frac{u}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} - \frac{6v}{u^2+v^2} = 0 \qquad / \cdot (u^2+v^2)^2$$

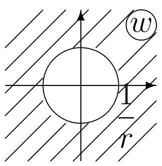
és rendezve

$$(u^2+v^2)(1 + 2u - 6v) = 0 \implies 1 + 2u - 6v = 0$$

Pl. $\boxed{\text{Határozzunk meg \textit{egy olyan} leképezést, mely az } A \text{ halmazt a } B \text{ halmazra képezi le.}}$

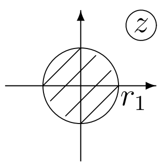
a.) $A = \{z : \ |z| \le r\}$, $B = \left\{w : \ |w| \ge \dfrac{1}{r}\right\}$

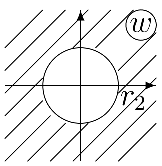





$w = \dfrac{1}{z}$ (De $w = e^{j\varphi_0}\,\dfrac{1}{z}$ is jó.)

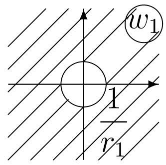
b.) $A = \{z : \ |z| \le r_1\}$, $B = \{w : \ |w| \ge r_2\}$





A leképezés közbülső lépése:

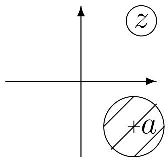
$$w_1 = \frac{1}{z}$$

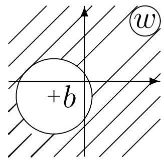



$$w = r_1 r_2 w_1$$

Tehát $w = r_1 r_2 \dfrac{1}{z}$ egy ilyen leképezés.

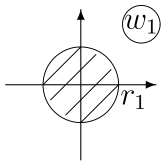
c.) $A = \{z : \ |z-a| \le r_1\}\,, \quad B = \{w : \ |w-b| \ge r_2\}$



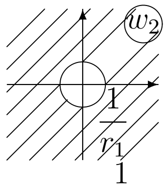




$w = w_3 + b$

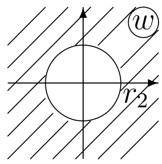
A leképezés közbülső lépései:




$w_1 = z - a$




$w_2 = \dfrac{1}{w_1}$

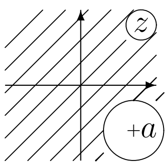


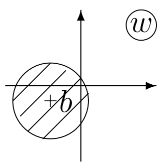

$w_3 = r_1 r_2 w_2$

Egy megfelelő függvény:

$$w = r_1 r_2 \frac{1}{z-a} + b$$

d.) $A = \{z : \ |z-a| \ge r_1\}\,, \quad B = \{w : \ |w-b| \le r_2\}$

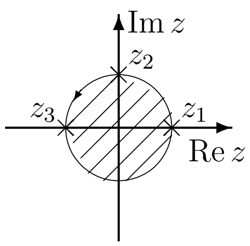


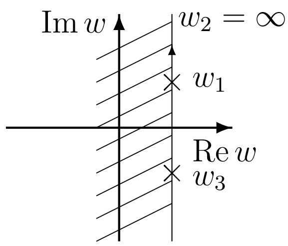




Ez ugyanaz, mint az előző:

$$w = r_1 r_2 \frac{1}{z-a} + b$$

Pl. $\boxed{\text{Mibe viszi át a } w = \dfrac{z}{z-2j} \text{ függvény a } |z| < 2 \text{ tartományt?}}$



$$z_1 = 2 \qquad w_1 = \frac{2}{2-j2} \cdot \frac{2+j2}{2+j2} = \frac{4+4j}{2^2+2^2} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

$$z_2 = 2j \qquad w_2 = \infty$$

$$z_3 = -2 \qquad w_3 = \frac{-2}{-2-j2} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Re} w \leq \frac{1}{2}$$

# 8. Elemi függvények

*Definíciók:*

$$\mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x(\cos y + j \sin y)$$

$$\sin z := \frac{\mathrm{e}^{jz} - \mathrm{e}^{-jz}}{2j} \qquad \operatorname{sh} z := \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\cos z := \frac{\mathrm{e}^{jz} + \mathrm{e}^{-jz}}{2} \qquad \operatorname{ch} z := \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

A definíciók felhasználásával beláthatók az alábbi azonosságok:

1.) $\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$

2.) $\mathrm{e}^{z+2\pi j} = \mathrm{e}^z$ ($\mathrm{e}^z$ $2\pi j$ szerint periodikus)

3.) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

4.) $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$

5.) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

6.) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

7.) $\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$

8.) $\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$

Mutassuk meg, hogy

1.) $\sin jz = j \operatorname{sh} z$

2.) $\operatorname{sh} jz = j \sin z$

3.) $\cos jz = \operatorname{ch} z$

4.) $\operatorname{ch} jz = \cos z$

a.) megoldása a szinusz függvény definíciójával:

$$\sin jz = \frac{e^{j(jz)} - e^{-j(jz)}}{2j} = \underbrace{\frac{1}{j}}_{=-j} \frac{e^{-z} - e^{z}}{2} = j\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = j\,\mathrm{sh}\,z$$

A többi hasonlóan látható be.

> Írjuk fel
> $$u(x,y) + jv(x,y)$$
> alakban a $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{sh}\,z$, $\mathrm{ch}\,z$ függvényeket!

$\sin z = \sin(x + jy) = \sin x \cdot \cos jy + \cos x \cdot \sin jy = \sin x\,\mathrm{ch}\,y + j\cos x\,\mathrm{sh}\,y$
Tehát
$u(x,y) = \sin x \cdot \mathrm{ch}\,y, \quad v(x,y) = \cos x \cdot \mathrm{sh}\,y$

Hasonlóan megmutatható, hogy
$\cos z = \cos(x + jy) = \cos x\,\mathrm{ch}\,y - j\sin x\,\mathrm{sh}\,y$
$\mathrm{sh}\,z = \mathrm{sh}\,(x + jy) = \mathrm{sh}\,x\cos y + j\,\mathrm{ch}\,x\sin y$
$\mathrm{ch}\,z = \mathrm{ch}\,(x + jy) = \mathrm{ch}\,x\cos y + j\,\mathrm{sh}\,x\sin y$

> A Cauchy–Riemann féle parciális differenciálegyenletek segítségével vizsgáljuk meg az
> $$e^z,\ \sin z,\ \cos z,\ \mathrm{sh}\,z,\ \mathrm{ch}\,z$$
> függvényeket differenciálhatóság és regularitás szempontjából!

$e^z = e^x\cos y + je^x\sin y$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y) = e^x\cos y \\ v(x,y) = e^x\sin y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{totálisan deriválhatók, mert a} \\ \text{parciálisok léteznek és folytonosak} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} u'_x = e^x\cos y & v'_y = e^x\cos y \\ u'_y = -e^x\sin y & v'_x = e^x\sin y \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{array} \quad \forall\,(x,y)\text{-ra}$$

Tehát mindenütt deriválható $\Longrightarrow$ mindenütt reguláris.

$$(e^z)' = u'_x + jv'_x = e^x\cos y + je^x\sin y = e^z$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$\left.\begin{array}{l} (\sin z)' = \cos z \\ (\cos z)' = -\sin z \\ (\mathrm{sh}\,z)' = \mathrm{ch}\,z \\ (\mathrm{ch}\,z)' = \mathrm{sh}\,z \end{array}\right\} \text{mindenütt regulárisak}$$

Az utóbbi deriváltak a függvények definíciójából a láncszabály segítségével is levezethetők.

## 8.1. Exponenciális függvény

(147.o.–153.o.; 152. oldalon b.) nem kell)

D $\boxed{\mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x(\cos y + j\sin y)}$

Tehát

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x; \quad \operatorname{arc} \mathrm{e}^z = y$$

Tulajdonságok:

$$\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^{-x}(\cos(-y) + j\sin(-y)) = \mathrm{e}^{-x}(\cos y - j\sin y) = \frac{1}{\mathrm{e}^z}$$

Továbbá igaz:

$\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$

$\left(\mathrm{e}^{z_1}\right)^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1 z_2}$

Tehát jogos a definíció.

*Periodikus függvény, periodusa $2\pi j$.*

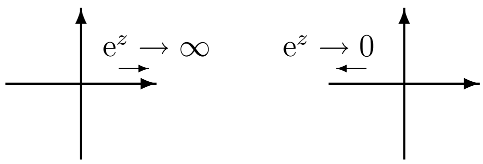
Ui.: $\mathrm{e}^{z+2k\pi j} = \mathrm{e}^{x+j(y+2k\pi)} = \mathrm{e}^z$

Tehát végtelen sokrétű leképezés.

0-*át ill.* $\infty$-*t soha nem veszi fel, minden más értéket igen.*

$\mathrm{e}^z \neq 0$, mert $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x > 0$

$\mathrm{e}^z \neq \infty$, mert csak a $\infty$-ben vehetné fel, de $\nexists \lim\limits_{z\to\infty} \mathrm{e}^z$




(Két úton mást kapunk.)

De $\forall w_0$-hoz $\exists z_0 :\ \mathrm{e}^{z_0} = w_0$, ha $w_0 \neq 0$ és $w_0 \neq \infty$.

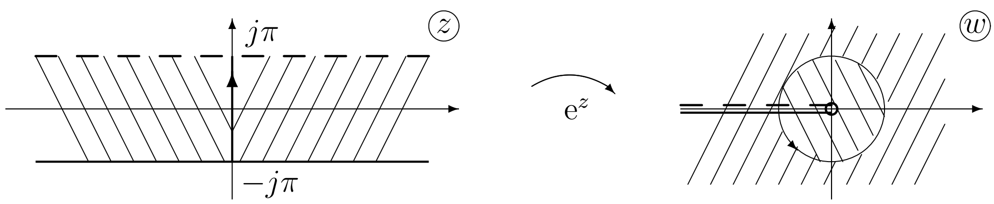
Ui.: $\mathrm{e}^{z_0} = \mathrm{e}^{x_0}\,\mathrm{e}^{jy_0} = w_0 = \varrho_0\,\mathrm{e}^{j\Theta_0}$ ($w_0$adott)

$\Longrightarrow\ \mathrm{e}^{x_0} = \varrho_0$, vagyis $x_0 = \ln\varrho_0$ és $y_0 = \Theta_0 + 2k\pi$.

Tehát $z_0 = \ln\varrho_0 + j(\Theta_0 + 2k\pi)$.

Ha leszűkítjük az értelmezési tartományt a fősávra, akkor a leképezés már kölcsönösen egyértelmű lesz.

Fősáv: $-\pi \leq \operatorname{arc} \mathrm{e}^z = y < \pi$



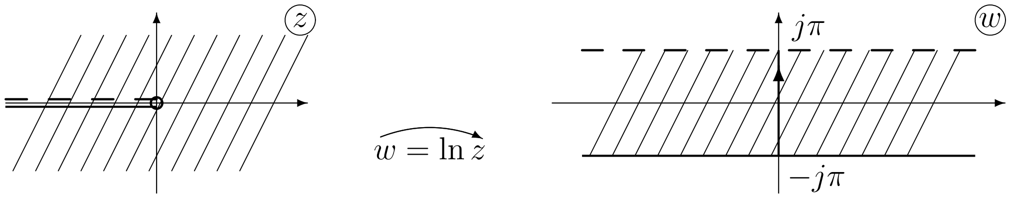
$$|w| = e^x\,, \quad \text{tehát } \begin{array}{l} x < 0 \,:\, |w| < 1 \\ x = 0 \,:\, |w| = 1 \\ x > 0 \,:\, |w| > 1 \end{array}$$

$e^z$ *mindenütt reguláris és mindenütt konform.*

Már láttuk: $(e^z)' = e^z \neq 0$

## 8.2. Logaritmus függvény ill. reláció (152. o.)

Az exponenciális függvény inverze. Ehhez $e^z$ értelmezési tartományát le kell szűkíteni, hogy a leképezés kölcsönösen egyértelmű legyen. Pl. a *fősáv*ban fennáll az invertálhatóság:




Értelmezési tartomány: $\mathbb{C} - \{0\}$

$w = \ln z :$ $\qquad z = e^w$

$$|z|\, e^{j \operatorname{arc} z} = e^{u+jv} = e^u\, e^{jv}$$

Ahonnan kapjuk, hogy

$u = \ln |z|$ (ez a valósból ismert függvény)

$v = \operatorname{arc} z \qquad -\pi \leq \operatorname{arc} z < \pi$

$$w = \ln z = \operatorname{Ln}_0 z = \ln |z| + j \operatorname{arc} z$$

A többi sávban is elvégezhető az invertálás, így jutunk el az $\operatorname{Ln} z$ végtelen sokértékű relációhoz.

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + j(\operatorname{arc} z + 2k\pi) \qquad k = 0, \pm 1, \ldots$$

$\operatorname{Ln}_k z$: ennek a $k$-adik ága. ($\operatorname{Arc} z = \operatorname{arc} z + 2k\pi$ jelölést is használjuk.)

Pl.

$\ln (1-j) = \ln \sqrt{2} + j\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\qquad \left(1 - j = \sqrt{2} e^{-j\pi/4}\right)$

$\operatorname{Ln} (1-j) = \ln \sqrt{2} + j\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$

$\ln j = \ln 1 + j\frac{\pi}{2} = j\frac{\pi}{2}$; $\qquad \operatorname{Ln} j = j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

## 8.3. A hatványfüggvény általánosítása a komplex síkra

$$z^\lambda := \mathrm{e}^{\lambda \ln z} \qquad z \neq 0\,;\; z\,,\, \lambda \in \mathbb{C}$$

Pl.

$$j^{1+j} = \mathrm{e}^{(1+j)\ln j} = \mathrm{e}^{(1+j)\,j\,\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} = j\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$$

# 9. Komplex vonalintegrál

*Megállapodások*:
$T$-vel tartományt jelölünk (összefüggő, nyílt ponthalmaz)
$L, G$: a komplex sík egy irányított, rektifikálható görbeszakasza

*Jordan-görbe*: (többszörös pont nélküli görbe) (96. o.)
$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$; $\quad \alpha \le t \le \beta \quad$ síkbeli ponthalmaz Jordan-görbe, ha

1.) $\gamma(t)$ folytonos $t \in [\alpha, \beta]$-n

2.) $\gamma(t)$ kölcsönösen egyértelműen képezi le az $[\alpha, \beta]$ bármely nyílt részintervallumát a komplex sík egy ponthalmazára (tehát $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ akkor és csak akkor, ha $t_1 = t_2$)

A Jordan-görbe zárt, ha $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, egyébként nyílt.

*Sima Jordan-görbe*: (érintője folytonosan változik) $x, y \in C^1_{[\alpha,\beta]}$

*Szakaszonként sima görbe*: véges sok sima görbe folytonos csatlakozással
A szakaszonként sima görbe mérhető ívhosszúságú:

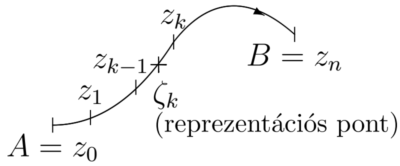
$$s = \int_\alpha^\beta |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

*Egyszerű görbe*: szakaszonként sima, irányított Jordan-görbe. Lehet zárt és nyílt.
Jelölése: $L \subset \mathbb{C}$ egyszerű.

### A komplex vonalintegrál definíciója

$L \subset \mathbb{C}$ egyszerű; $f$ értelmezett $L$-en és itt $|f(z)|$ korlátos.

$z_0, z_1, \ldots, z_n$ a befutás sorrendjében.
$\Delta P_n$ $(= \Delta F_n)$: a $P_n$ $(F_n)$ felosztás finomsága: a szomszédos osztópontokat összekötő görbeszakaszok ívhosszainak a maximuma.



Ⓓ

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int_L f(z)\,\mathrm{d}z=\lim_{\Delta P_n\to 0}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})}_{\text{integrálközelítő-összeg}}\in\mathbb{C}\\[2ex] \text{Jelölés: } \int_L f(z)\,\mathrm{d}z;\quad \oint_L f(z)\,\mathrm{d}z\quad \text{(zárt görbénél)}\end{array}}$$

Elégséges feltétel az integrál létezésére pl. $f$ folytonossága.

Érdekesség:

$$\oint c\,\mathrm{d}z=0\,,\qquad c\in\mathbb{C}.$$

Ugyanis minden integrálközelítő-összegre:

$$\sum_{k=1}^{n} c\,(z_k-z_{k-1})=c\,\left((z_1-z_0)+(z_2-z_1)+\cdots+(z_n-z_{n-1})\right)=c\,\underbrace{(z_n-z_0)}_{=0 \text{ a zárt-ság miatt}}=0$$

**A komplex vonalintegrál néhány tulajdonsága**

$L, L_1, L_2$ egyszerű görbék, $f$ és $g$ integrálhatók $L, L_1, L_2$-n.

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z=-\int_{-L} f(z)\,\mathrm{d}z\qquad (-L\text{: } L \text{ ellentétes irányítással})$$

$$\int_L c\,f(z)\,\mathrm{d}z=c\int_L f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_L (f(z)+g(z))\,\mathrm{d}z=\int_L f(z)\,\mathrm{d}z+\int_L g(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_{L_1\cup L_2} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{L_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\left|\int_L f(z)\,\mathrm{d}z\right|\le M\cdot s\,,\qquad L\text{-en } |f(z)|\le M,\quad s\text{: az } L \text{ görbe ívhossza}$$

## 9.1. Az integrál kiszámítása

$T_1$ $L:\ z(t)=x(t)+j\,y(t)$ vagy $z(t)=r(t)\,\mathrm{e}^{j\varphi(t)}$, $\qquad z\in C^1_{[\alpha,\beta]}$,

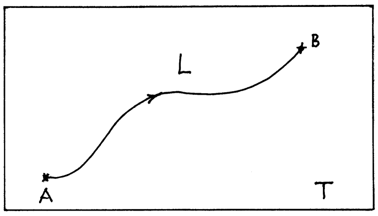
$f$ folytonos $L$-en

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t))\ \dot z(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t$$

T$_2$ Newton–Leibniz-formula általánosítása:

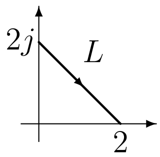
$L \subset T\ ;\quad \exists\, T\text{-n}\ \ F:\quad F'(z) = f(z)$
(∃ primitív függvény)

$$\int_{L_{\overset{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z = F(B) - F(A)$$




Pl.

1.) $\boxed{\displaystyle\int_L \mathrm{e}^{jz}\,\mathrm{d}z =}\ \left.\dfrac{\mathrm{e}^{jz}}{j}\right|_{2j}^{2} = -j\left(\mathrm{e}^{2j} - \mathrm{e}^{-2}\right)$




2.) $\boxed{\displaystyle\int_L \mathrm{e}^{j\bar z}\,\mathrm{d}z = ?}$

$x + y = 2 \quad\Longrightarrow\quad z(t) = t + j(2-t)\quad t\in[0,2],\qquad \dot z(t) = 1 - j$

$f(z(t)) = \mathrm{e}^{j(t-j(2-t))} = \mathrm{e}^{2-t+jt} = \mathrm{e}^2\mathrm{e}^{(-1+j)t}$

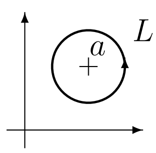
$f(z(t))\cdot\dot z(t) = (1-j)\mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{(-1+j)t}$

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^2 f(z(t))\cdot\dot z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (1-j)\mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{(-1+j)t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= (1-j)\mathrm{e}^2\int_0^2 \mathrm{e}^{(-1+j)t}\,\mathrm{d}t == (1-j)\mathrm{e}^2\left.\frac{\mathrm{e}^{(-1+j)t}}{-1+j}\right|_0^2 = -\mathrm{e}^2\left(\mathrm{e}^{-2+j2} - 1\right)$$

Pl. Mutassuk meg, hogy

$$\oint_L (z-a)^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq -1\\ 2\pi j, & \text{ha } n = -1\end{cases}$$



$z(t) = a + r\mathrm{e}^{jt}\ \ (= (a_1 + r\cos t) + j(a_2 + r\sin t))\,; \qquad \dot{z}(t) = jr\,\mathrm{e}^{jt}$
$n = -1:$

$$\oint_L \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + r\mathrm{e}^{jt} - a}\, jr\mathrm{e}^{jt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} j\,\mathrm{d}t = 2\pi j$$

$n \neq -1 \quad (n \in \mathbb{Z}):$

$$\oint_L (z-a)^n\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^n\,\mathrm{e}^{jnt}\,jr\,\mathrm{e}^{jt}\,\mathrm{d}t = jr^{n+1}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{j(n+1)t}\,\mathrm{d}t = jr^{n+1}\left.\frac{\mathrm{e}^{j(n+1)t}}{j(n+1)}\right|_0^{2\pi} = 0$$

## 9.2. Cauchy-féle alaptétel

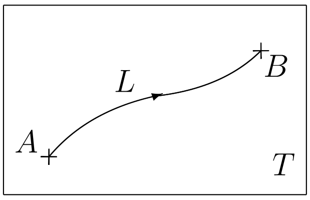
T Ha $f$ reguláris az egyszeresen összefüggő $T$ tartományon, akkor minden $T$-beli egyszerű zárt görbére:

$$\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \qquad (\neg\mathrm{B})$$

**A Cauchy-féle alaptétel következményei:**

T $f$ reguláris az egyszeresen összefüggő $T$ tartományon; $L \subset T$ egyszerű.

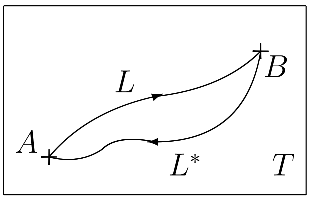
Ekkor $\displaystyle\int_{L_{\stackrel{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z$ értéke független $L$-től, értéke csak a végpontoktól függ.




B

$$\int_{L_{\stackrel{\frown}{AB}} \cup L^*_{\stackrel{\frown}{BA}}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{L_{\stackrel{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{L^*_{\stackrel{\frown}{BA}}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{L_{\stackrel{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{L^*_{\stackrel{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{L_{\stackrel{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{L^*_{\stackrel{\frown}{AB}}} f(z)\,\mathrm{d}z$$




T Ha $f$ reguláris az egyszeresen összefüggő $T$ tartományon, akkor létezik primitív függvénye.

Pl. $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$ az, ahol az integrálás tetszőleges $L_{\widehat{z_0 z}}$ egyszerű görbére végezhető.

Ⓑ $(\neg B)$

Ⓣ *Cauchy-tétel többszörösen összefüggő tartományon*:

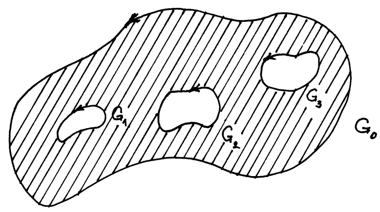
$G_i\,,\quad i = 0, 1, \ldots, n$ egyszerű, zárt görbék; $G_0$ „körülveszi" $G_1, \ldots, G_n$-et.
$f$ reguláris egy, a vonalkázott zárt tartományt tartalmazó többszörösen összefüggő tartományon.

Ekkor

$$\oint\limits_{G_0^+} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{G_k^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

vagyis

$$\oint\limits_{G_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{G_k} f(z)\,\mathrm{d}z$$

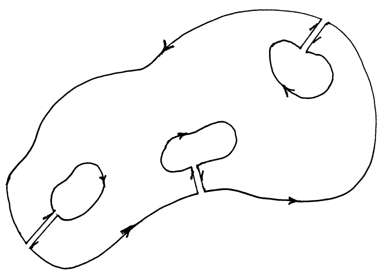



$n = 3$ esetén

$(G_0, G_1, \ldots, G_n$ azonos irányítású egyszerű zárt görbék)

Ⓑ (Vázlat)

L:



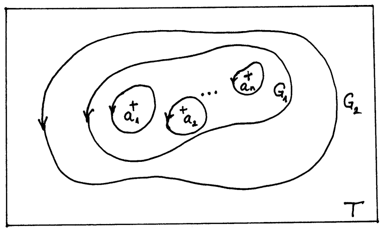
$$\int\limits_{L} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ldots$$

Ⓜ A Cauchy alaptétel akkor is igaz, ha $L$ olyan zárt görbe, amely véges sok egyszerű görbe egyesítése.

Ⓣ $f$ reguláris az egyszeresen összefüggő $T$ tartományon az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pontok kivételével (izolált szingularitások).
$G_1, G_2 \subset T$ azonos irányítású egyszerű, zárt görbék és „körülveszik" az $a_1, \ldots, a_n$ pontokat.

Az adott feltételek mellett:

$$\oint_{G_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{G_2} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \underbrace{\left( = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} f(z)\,\mathrm{d}z \right)}_{\text{a bizonyításhoz}}$$

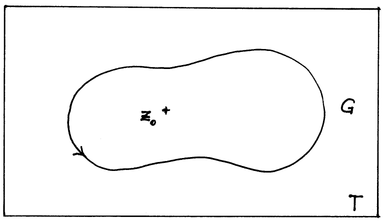


Ⓑ Az előző tétel segítségével.

Ⓣ $f$ a $z_0$ kivételével reguláris az egyszeresen összefüggő $T$ tartományon, és létezik $\dot{K}_{z_0,\delta_0} \subset T$, melyben $f$ korlátos.
$G \subset T$ egyszerű, zárt görbe, mely „körülveszi" $z_0$-t.

Ekkor

$$\oint_G f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$



Ⓑ

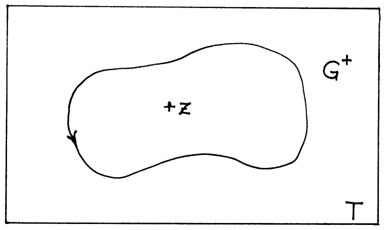
$$\left| \oint_G f(z)\,\mathrm{d}z \right| = \left| \oint_K f(z)\,\mathrm{d}z \right| \le M \cdot \underbrace{2\delta\pi}_{s} < \varepsilon, \qquad \text{ha } \delta < \frac{\varepsilon}{2M\pi} \qquad (K:\ |z - z_0| = \delta < \delta_0)$$

$$\Longrightarrow \quad \oint_G f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

## 9.3. Reguláris függvény előállítása integrálalakban egyszeresen összefüggő tartományon

Ⓣ *Cauchy-féle integrálformula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{G^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$




<u>Feltételek:</u>
$f$ reguláris az egyszeresen összefüggő $T$ tartományon, $G \subset T$ egyszerű, zárt görbe, „egyszer futja körbe" a $z$ pontot.

Ⓑ

$$\oint\limits_{G^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint\limits_{G^+} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \underbrace{\oint\limits_{G^+} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta}_{\circledast} + \oint\limits_{G^+} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= f(z) \oint\limits_{G^+} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \cdot 2\pi j$$

$\circledast$ $z$ környezetében korlátos, hiszen $\exists f'(z)$, $z$ kivételével pedig reguláris.

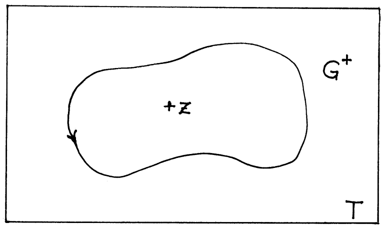
$$\Longrightarrow \quad \oint\limits_{G^+} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \qquad \text{(az előző tétel miatt)}$$

## 9.4. Magasabbrendű deriváltak létezése és integrál-előállítása

Ⓣ *Általánosított Cauchy-féle integrálformula*

$f$ reguláris az egyszeresen összefüggő $T$ tartományon; $z \in T$, $G \subset T$ egyszerű, zárt görbe, „egyszer futja körbe" a $z$ pontot. Ekkor $f$ $z$-ben akárhányszor deriválható függvény, és

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \oint\limits_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad n = 1, 2, \ldots$$




Vagyis: ha $f$ reguláris az egyszeresen összefüggő $T$ tartományon, akkor ott akárhányszor differenciálható. (¬B)

# 10. Komplex hatványsor (általánosított hatványsor)

1.) Komplex elemű hatványsor
(Pozitív kitevőjű hatványok végtelen összege.)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k\,, \quad \text{ahol} \quad a_k\,,\ z\,,\ z_0 \in \mathbb{C}$$

A valós esethez hasonlóan a sor konvergens, ha

$$|z-z_0|<R\,, \quad \text{ahol} \quad R=\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}\,, \ \text{illetve} \quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

$|z-z_0|>R$ tartományon a hatványsor divergens, $|z-z_0|=R$ : kérdéses eset.

Speciális esetek:

$R=\infty$ : a sor minden $z$-ben konvergens,
$R=0$ : a sor csak $z=z_0$-ban konvergens.

Pl. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2j}{2-j}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2-j}\right)^n (z+2j)^n$ : geometriai sor, így konvergenciáját ismerjük.

Konvergencia tartomány: $|q|=\left|\dfrac{z+2j}{2-j}\right|=\dfrac{|z+2j|}{\sqrt{5}}<1 \implies |z+2j|<\sqrt{5}$ ,
tehát a $z_0=-2j$ pont $\sqrt{5}$ sugarú környezetében konvergens.

2.) Negatív kitevőjű hatványok végtelen összege:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\frac{1}{(z-z_0)^k}=\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\,(z-z_0)^{-k}\,, \quad \text{ahol} \quad b_k\,(=c_{-k})\,,\ z\,,\ z_0\in\mathbb{C}$$

A konvergencia vizsgálatot $u=\dfrac{1}{z-z_0}$ helyettesítéssel visszavezetjük az elöző esetre:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\,u^k \ \text{konvergens, ha} \quad |u|<R \implies \left|\frac{1}{z-z_0}\right|<R$$

$$\implies r:=\frac{1}{R}<|z-z_0|$$

Tehát most a konvergencia tartomány egy kör ( $r$ sugarú) külseje, a belső pontokban divergencia van, a körvonal pontjai kérdésesek. ( $R$-et itt is a valósból ismert képlettel számolhatjuk.)

Speciális esetek:

$r=\infty$ : a sor egyetlen pontban sem konvergens,

$r = 0$ : a sor $z = z_0$ kivételével minden $z$-ben konvergens.

3.) Általánosított komplex hatványsor:

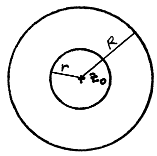
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\frac{1}{(z-z_0)^k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k =$$

$$= \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1\,(z-z_0) + c_2\,(z-z_0)^2 + \ldots$$

$$c_k\,,\ z\,,\ z_0 \in \mathbb{C}$$

Az általánosított hatványsor konvergencia tartománya az előző típusú konvergencia tartományok közös része lehet, tehát egy $z_0$ középpontú nyílt körgyűrű:

$Gy_{z_0,r,R} = \{z:\ r < |z-z_0| < R\}$ , ahol
$r =$ a belső kör sugara,
$R =$ a külső kör sugara



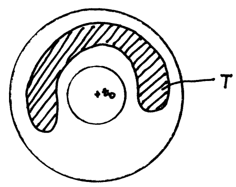

A gyűrű határpontjaiban a konvergencia kérdéses.

Speciális esetek: $K_{z_0,R}$ , $\dot{K}_{z_0,R}$ , $\mathbb{C}$ , $\emptyset$

**Az általánosított hatványsor tulajdonságai**

T1

Ha a korlátos és zárt $T \subset Gy_{z_0,r,R}$ (gyűrű, nyílt halmaz) az általánosított hatványsor konvergencia gyűrűjének, akkor $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k$ egyenletesen konvergens a $T$ tartományon.

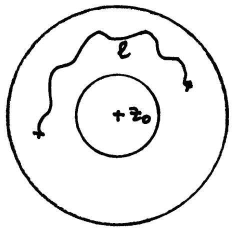



T2 Ha $z \in Gy_{z_0,r,R}$ nyílt gyűrűnek, akkor $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k$ folytonos $z$-ben.

T3 Ha $z \in Gy_{z_0,r,R}$ nyílt gyűrűnek, akkor $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k$ akárhányszor differenciálható $z$-ben ( $\Longrightarrow$ reguláris $z$-ben) és az összegfüggvény deriváltját tagonkénti deriválással kaphatjuk meg.

(T4)

$L$ egyszerű görbe, $L \subset Gy_{z_0,r,R}$, akkor



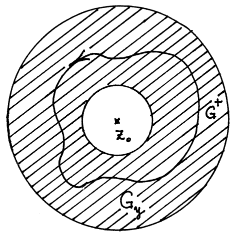

$$\int_L \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k\,\mathrm{d}z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_L (z-z_0)^k\,\mathrm{d}z$$

azaz tagonként szabad integrálni.

**Mi a kapcsolat egy hatványsor összegfüggvénye és az együtthatók között?**

(T)

| |
|---|
| Ha $$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$ ekkor $$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,$$ ahol $G^+ \subset Gy$ ($Gy$: a sor konvergencia gyűrűje) |




(B) (Vázlat)

Felhasználjuk, hogy $\oint_G \ldots = \oint_{K_{z_0,\varrho}} \ldots$, ha $r < \varrho < R$, és mivel a konvergencia egyenletes, tagonként integrálhatunk.

1.)

$$\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\oint_K (z-z_0)^n\,\mathrm{d}z}_{=\begin{cases} 2\pi j, \text{ ha } n=-1 \\ 0, \text{ egyébként}\end{cases}} = c_{-1}\cdot 2\pi j$$

Tehát $n=-1$- re igaz az állítás.

(D)

| |
|---|
| $$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{G^+} f(z)\,\mathrm{d}z \;:\quad \text{residuum (maradvány)}$$ |
| ha speciálisan a KT.: $0 < \lvert z-z_0\rvert < R$ |

2.) Osszuk el a sort $(z-z_0)$ -lal:

$$\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = c_0\cdot 2\pi j + 0 + \cdots$$

Tehát $n=0$- ra is igaz.

3.) Osszuk el pl. $(z-z_0)^{-1}$ -gyel:

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-1}} = f(z)\cdot(z-z_0) = \cdots + c_{-2}\,\frac{1}{z-z_0} + c_{-1} + c_0(z-z_0) + \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad \oint_K \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-1}}\,\mathrm{d}z = c_{-2}\cdot 2\pi j$$

Tehát $n=-2$- re is igaz.
Stb.

# 11. Laurent sor

Ⓓ

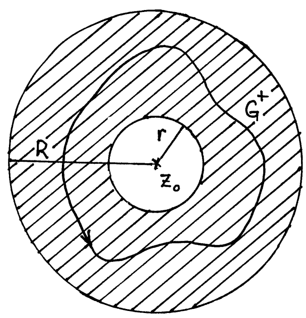
$f$ reguláris $Gy: r<|z-z_0|<R$- en,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\,,$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

ahol $G^+\subset Gy$




Ha $f$ reguláris $|z-z_0|<R$-en:

$n<0$- ra:

$$c_n = 0\,,\ \text{ hiszen } \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \text{ is reguláris}$$

$n\geq 0$- ra:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi j}\cdot 2\pi j\,\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad \text{(Taylor-együtthatók)}$$

Tehát ekkor speciális esetként Taylor-sort kapunk.

(D) A $H$ nemüres nyílt halmaz bármely pontja körül hatványsorba fejthető komplex függvények a $H$ halmazon *analitikus függvény*ek.

(T) Az $f$ komplex függvény akkor és csak akkor analitikus egy $H$ halmazon, ha ott reguláris.

Példák: l. előadás és gyakorlat

## 11.1. Izolált szingularitások

(D) $f$-nek *izolált szingularitás*a van $z_0$-ban, ha $f$ $z_0$-ban nem differenciálható, de $f$ reguláris $\dot{K}_{z_0,\delta} = K_{z_0,\delta} \setminus \{z_0\}$-ban.

**Izolált szingularitások osztályozása** ($z_0$ az izolált szinguláris pont)

1.) *Megszüntethető szingularitás*: $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ $(= c_0)$
(A $z_0$ közvetlen környezetében konvergens, $(z - z_0)$ hatványait tartalmazó sorban nincs negatív kitevőjű tag.)

2.) *Pólus*: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$

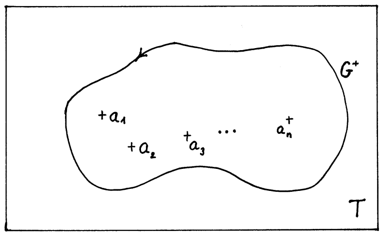
(D) A pólus *n-edrendű*, ha $\exists \lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0$ $(= c_{-n})$
(A sorban véges sok negatív kitevőjű tag van.)

3.) *Lényeges szingularitás*: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \nexists$ $(\nrightarrow \infty$ sem!)
(A megfelelő sorban végtelen sok negatív kitevőjű tag van.)

## 11.2. Residuum-tétel

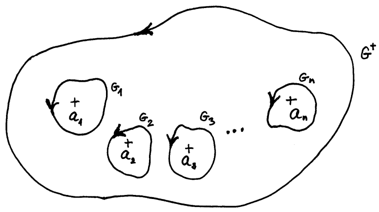
Ⓣ $T$ egyszeresen összefüggő tartomány; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ izolált szingularitások; $f$ reguláris ezen pontok kivételével

$$\oint_{G^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z)$$




Ⓑ

$$\oint_{G^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{G_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \cdots$$




## 11.3. Residuumok meghatározása

1.) Sorfejtéssel

2.) Elsőrendű pólus esetén:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left((z-z_0)\, f(z)\right)$$

3.) $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$; $g$ és $h$ reguláris a $z = z_0$ pont egy környezetében; $h(z_0) = 0$, de $h'(z_0) \neq 0$

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

4.) Ha $z = z_0$ $n$-edrendű pólus:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z-z_0)^n\, f(z)\right)$$

# 12. Néhány példa

Pl.

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}$$

1.) Állítsa elő a függvény $z_0=j$ bázispontú összes Laurent-sorfejtését!

2.) $\displaystyle\oint_{|z-2j|=2}\frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z=?$

Megoldás:

1.) $f(z)=\dfrac{1}{z-j}\,\dfrac{1}{z+j}=\dfrac{1}{z-j}\,g(z)$

$g(z)$ sorfejtését kell megcsinálni a megfelelő körgyűrűn, és minden tagot megszorozni $\dfrac{1}{z-j}$-vel.

$$g(z)=\frac{1}{z+j}=\frac{1}{z-j+2j}$$

$\alpha$.)

$$g(z)=\frac{1}{2j}\,\frac{1}{1-\frac{-(z-j)}{2j}}=\frac{1}{2j}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-(z-j)}{2j}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2j}\right)^{k+1}(z-j)^k=$$

$$=\frac{1}{2j}-\frac{1}{(2j)^2}(z-j)+\frac{1}{(2j)^3}(z-j)^2+\cdots$$

$$q=-\frac{z-j}{2j}\qquad \text{KT.: } |q|=\left|-\frac{z-j}{2j}\right|=\frac{|z-j|}{2}<1\quad\Longrightarrow\quad |z-j|<2$$

$$f(z)=\frac{1}{z-j}\,g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2j}\right)^{k+1}(z-j)^{k-1}=$$

$$=\frac{1}{2j}\,\frac{1}{z-j}-\frac{1}{(2j)^2}+\frac{1}{(2j)^3}(z-j)+\cdots$$

KT.: $0<|z-j|<2$

$\beta$.)

$$g(z)=\frac{1}{z-j}\,\frac{1}{1-\frac{-2j}{z-j}}=\frac{1}{z-j}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-2j}{z-j}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-2j)^k\,\frac{1}{(z-j)^{k+1}}=$$

$$=\frac{1}{z-j}-2j\,\frac{1}{(z-j)^2}+(2j)^2\,\frac{1}{(z-j)^3}-\cdots$$

$$q = \frac{-2j}{z-j} \qquad \text{KT.: } |q| = \left|\frac{-2j}{z-j}\right| = \frac{2}{|z-j|} < 1 \quad \Longrightarrow \quad |z-j| > 2$$

$$f(z) = \frac{1}{z-j}\, g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-2j)^k \frac{1}{(z-j)^{k+2}} = \frac{1}{(z-j)^2} - 2j\,\frac{1}{(z-j)^3} + \cdots$$

KT.: $|z-j| > 2$

Ⓜ Másik lehetőség:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-j)(z+j)} = \frac{A}{z-j} + \frac{B}{z+j} = f_1(z) + f_2(z)$$

$A$ és $B$ meghatározása után $f_1(z)$ sorfejtése kész, és csak $f_2(z)$ sorfejtése van hátra.

2.)

$$\oint_{|z-2j|=2} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \operatorname*{res}_{z=j} f(z) = 2\pi j \cdot \frac{1}{2j} = \pi$$

Vigyázat! $\operatorname*{res}_{z=j} f(z)$ a $j$ pont közvetlen környezetében konvergens konvergens, $(z-j)$ hatványait tartalmazó Laurent-sor $c_{-1}$ együtthatója, tehát az $\alpha$ sorból kell leolvasni!

Ⓜ Természetesen a Cauchy-féle integrálformula alkalmazásával is megkapható az integrál értéke.

(Pl.)

$$f(z) = \frac{z-1}{(z-2)^2\,(z+1)}$$

Adja meg a $z_0 = 2$ bázispontú Laurent-sorfejtéseket!

Megoldás:
$(z-2)$ hatványait tartalmazó konvergens Laurent-sorba fejthető az

$\alpha$.) $0 < |z-2| < 3$

$\beta$.) $|z-2| > 3$

körgyűrűkön.

Útmutató:

$$\frac{z-1}{(z-2)^2\,(z+1)} = \frac{A}{(z-2)^2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z+1}$$

$A, B, C$ meghatározható. Az első két tag sorfejtése önmaga, KT.: $|z-2| > 0$. Csak a harmadik tag sorfejtését kell elvégezni.

Vagy:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}\,\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{(z-2)^2}\,g(z)$$

$g(z)$ sorfejtését kell elvégezni, és minden tagot $\dfrac{1}{(z-2)^2}$-nel beszorozni.

$$g(z) = \frac{z-1}{z+1} = \frac{z+1-2}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$$

Az első tag kész, a második tagot kell sorbafejteni:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-2)+3} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{1-\frac{-(z-2)}{3}} = \cdots & \qquad q = -\dfrac{z-2}{3} \\[2ex] \dfrac{1}{z-2}\,\dfrac{1}{1-\frac{-3}{z-2}} = \cdots & \qquad q = -\dfrac{3}{z-2} \end{cases}$$

Pl.

> Állapítsa meg a szingularitás jellegét és a residuumot a szinguláris pontban!
>
> 1.) $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}}$
>
> 2.) $g(z) = \dfrac{1}{z^2}\,\mathrm{e}^z$

Megoldás:
Felhasználjuk, hogy

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \cdots \qquad \forall u \in \mathbb{C}\text{- re.}$$

1.)

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z^4} + \cdots + \frac{1}{n!\,z^{2n}} + \cdots \qquad |z| > 0$$

$\operatorname*{res}_{z=0} \mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}} = c_{-1} = 0;$ $\quad z = 0$ lényeges szingularitás (végtelen sok negatív kitevőjű tag van)

2.)

$$\frac{1}{z^2}\,\mathrm{e}^z = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots + \frac{z^{n-2}}{n!} + \cdots \qquad |z| > 0$$

$\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{1}{z^2}\mathrm{e}^z = c_{-1} = 1;$ $\quad z = 0$ másodrendű pólus

Pl.

> $$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\mathrm{e}^{2z}-1}{8z^3}\,\mathrm{d}z = I \ = ?$$

1. megoldás:
A Cauchy-féle általánosított integrálformula szerint: ($f$ reguláris $T$ egyszeresen összefüggő tartományon)

$$\oint_{G^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi j}{n!}\, f^{(n)}(z_0)$$

$f(z) = \dfrac{1}{8}\,(\mathrm{e}^{2z}-1)$ mindenütt reguláris; $\quad n+1=3 \quad\Longrightarrow\quad n=2; \quad z_0=0$

Ezért:

$$I = \frac{2\pi j}{2!}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{1}{8}\,(\mathrm{e}^{2z}-1)\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{2\pi j}{2!}\cdot\frac{1}{8}\,2^2\,\mathrm{e}^{2z}\Bigg|_{z=0} = j\,\frac{\pi}{2}$$

2. megoldás:
Dolgozhatunk a residuum tétellel is, mert most könnyen meghatározható sorfejtéssel a residuum.

$$\mathrm{e}^{2z} = 1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \cdots \qquad \forall z\in\mathbb{C}\text{-re}$$

$$g(z) = \frac{\mathrm{e}^{2z}-1}{8z^3} = \frac{2}{8}\,\frac{1}{z^2} + \frac{2^2}{8\cdot 2!}\,\frac{1}{z} + \frac{2^3}{8\cdot 3!} + \frac{2^4}{8\cdot 4!} + \cdots$$

KT.: $|z|>0$

$$\operatorname*{res}_{z=0} g(z) = c_{-1} = \frac{2^2}{8\cdot 2!} = \frac{1}{4} \quad\Longrightarrow\quad I = 2\pi j \operatorname*{res}_{z=0} g(z) = 2\pi j\cdot\frac{1}{4} = j\,\frac{\pi}{2}$$

M Egyébként a sorfejtésből az is leolvasható, hogy a $z_0=0$ szingularitás másodrendű pólus.

Pl.

$$f(z) = \frac{\sin(z+2j)}{(z+2j)^2\,z}$$

1.) Hol és milyen szingularitása van $f$-nek?

2.) $\displaystyle\oint_{|z-1|=3} f(z)\,\mathrm{d}z = ?$

Megoldás:

1.) Szinguláris pontok: $-2j$, $0$. Mindkettő elsőrendű pólus, mert:

$$\lim_{z\to -2j}(z+2j)^1 f(z) = \lim_{z\to -2j}\underbrace{\frac{\sin(z+2j)}{z+2j}}_{\downarrow \atop 1}\,\frac{1}{z} = \frac{1}{-2j} = j\,\frac{1}{2} \neq 0$$

ill.

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z+2j)}{(z+2j)^2} = \frac{\sin 2j}{(2j)^2} = \frac{j \operatorname{sh} 2}{(2j)^2} = \frac{j \operatorname{sh} 2}{-4} = -j\,\frac{\operatorname{sh} 2}{4}$$

2.) Mivel elsőrendű pólus esetén

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z),$$

az előbb megkaptuk a residuumokat, és így célszerű a residuum tételt alkalmazni.

$$\oint\limits_{|z-1|=3} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi j \left( \operatorname*{res}_{z=-2j} f(z) + \operatorname*{res}_{z=0} f(z) \right) = 2\pi j \left( j\,\frac{1}{2} - j\,\frac{\operatorname{sh} 2}{4} \right) = -\pi + \frac{\pi \operatorname{sh} 2}{2}$$