1) Van egy fekete és egy fehér cicám, a fekete átlagosan naponta 5-ször, míg a fehér 4-szer kér kaját egy nap (egymástól függetlenül kérnek). Mindkettőjük kéregetése Poisson folyamatot követ. Mi a valószínűsége, hogy

1. a fekete 6 óra alatt több, mint kétszer kér enni? (2p)
2. a fehér első és második kéregetése között több, mint 3 óra telik el? (2p)
3. ha 5 órája nem volt kéregetés, akkor még legalább 2 óráig nem lesz? (két cicától együttesen) (2p)
4. ha együtt összesen 8-szor kértek kaját, akkor mi a valószínűsége, hogy a fehér 3-szor kért? Ha rögzítem az összeget 8-nak és rákérdezek a fehér kéregetésinek számára $(0, 1, \ldots, 8)$, akkor mi a kapott eloszlás neve és paraméterei? (3p)

a.) $X \sim \text{Poisson}\left(\lambda = 5,\ t = \frac{1}{4}\right)$

$$P(X > 2) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right) = 1 - e^{-\frac{5}{4}}\left(\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{2!}\right)$$

b.) $Y \sim \text{EXP}(\lambda = 4)$

$$P\left(Y > \frac{1}{8}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{4}{8}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$$

c.) $W = \text{EXP}(\lambda = 5+4)$

$$P\left(W > \frac{7}{24} \,\middle|\, W > \frac{5}{24}\right) \overset{\text{örökifjú}}{=} P\left(W > \frac{1}{12}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{9}{12}}\right) = e^{-\frac{3}{4}}$$

d.) $Z = \text{Poisson}(\lambda = 9,\ t = 1)$ $\quad T \sim \text{Poisson}(\lambda = 4,\ t = 1)$ $\quad H \sim \text{Poisson}(\lambda = 5,\ t = 1)$ $\quad Z = T + H$

$$P(T = 3 \mid Z = 8) = \frac{P(T = 3 \cap Z = 8)}{P(Z = 8)} \overset{\text{független}}{=} \frac{P(T = 3)\,P(H = 5)}{P(Z = 8)} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{-4}} \cdot \frac{4^3}{3!} \cdot \cancel{e^{-5}} \cdot \frac{5^5}{5!}}{\cancel{e^{-9}} \cdot \frac{9^8}{8!}} = \boxed{\binom{8}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^5}$$

$$\boxed{\binom{8}{k}\left(\frac{4}{9}\right)^k\left(\frac{5}{9}\right)^{8-k} \quad \text{BINOM}}$$

2) Legyen $X \sim Uni(0,2)$, $Y \sim Uni(0,1)$ függetlenek

2) Legyen $X \sim Uni(0,2)$, $Y \sim Uni(0,1)$ függetlenek. → uaz, mint az előző Zh-n

1. Mi az $X+Y$ sűrűségfüggvénye ($f_{X+Y}(s)$ konvolúciós függvény)? (6p)
2. Legyen $w^2 + 2Xw + Y = 0$ másodfokú egyenlet. Mi a valószínűsége, hogy lesznek valós gyökei? (w tehát algebrai változó, X, Y a fent említett valváltozók) (5p)
3. Mi lesz az előző másodfokú diszkriminánsának várható értéke? (EXTRA +3p)

$$w_{1,2} = \frac{-2X \pm \sqrt{(2X)^2 - 4Y}}{2}$$

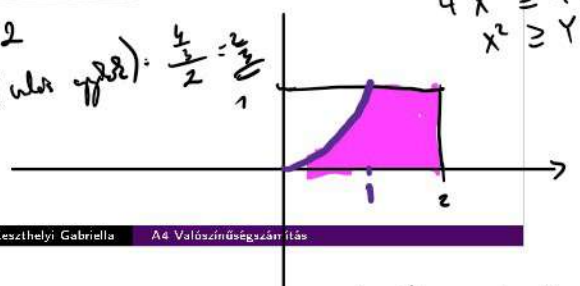
$(2X)^2 - 4Y \geq 0 \iff$ w-nek lesznek valós gyökei

$4X^2 \geq 4Y$

$X^2 \geq Y$

$T_{\text{sikeres}} = \frac{4}{3}$ $P(\text{valós gyökök}) = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

$T_{\text{összes}} : 2$



$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$E\left((2X)^2 - 4Y\right) = ? \quad E(4X^2 - 4Y) = E(4X^2) - E(4Y) = 4\underbrace{E(X^2)}_{\frac{4}{3}} - 4\underbrace{E(Y)}_{0{,}5}$$

$X \sim Uni(0,2)$ $E(X^2) = ?$

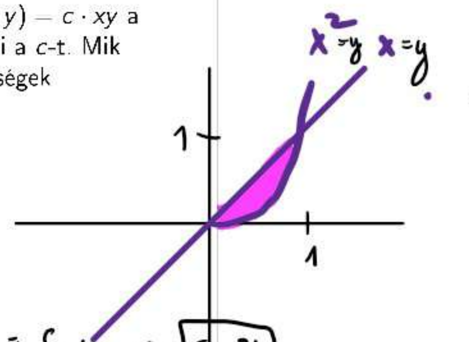
$$D^2(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = E(X^2) - \underbrace{E(X)}_{1}$$

$$\frac{4}{12} + 1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} = E(X^2)$$

3) Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = c \cdot xy$ a $0 < x < 1$, $x^2 < y < x$ tartományon. Számold ki a c-t. Mik lesznek a peremsűrűségek, illetve feltételes sűrűségek ($f_1(x), f_2(y), f_{1|2}(x|y), f_{2|1}(y|x)$)? (6p)

$$1 = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} cxy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{cxy^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{cx}{2}(x^2 - x^4)\,dx = \left[\frac{c}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\right]_0^1 = \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{12} \Rightarrow \boxed{c = 24}$$



$$f_1(x) = \int_{x^2}^{x} 24xy\,dy = \left[12xy^2\right]_{x^2}^{x} = 12x(x^2 - x^4)$$

$$f_2(y) = \int_{y}^{\sqrt{y}} 24xy\,dx = \left[12x^2y\right]_{y}^{\sqrt{y}} = 12(y^2 - y^3)$$

$$f_2(y) = \int_y^{\sqrt{y}} 24xy\,dx = \left[12x^2y\right]_y^{\sqrt{y}} = \underline{12(y^2 - y^3)}$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{24\,xy}{12(y^2-y^3)} = \underline{\underline{\frac{2x}{y-y^2}}}$$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{24\,xy}{12(x^2-x^4)} = \underline{\underline{\frac{2y}{x^2-x^4}}}$$

4) Legyenek X_i-k egyenletes eloszlásúak, 7 várható értékkel és 12 varianciával.

1. Becsüld meg annak a valószínűségét, hogy $X_1 + \cdots + X_{25} > 200$. (6p) $P(X_i > 5) = ?$
2. Legalább hány X_i-t adjunk össze, hogy összegük 90%-os valószínűséggel meghaladja a 300-at? (EXTRA +3p)

$$S_{25} \sim N(25 \cdot 7, \sqrt{25} \cdot \sqrt{12})$$

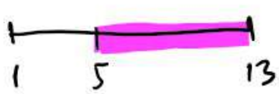
$$P(S_{25} > 200) = P\left(\frac{S_{25} - 175}{\sqrt{25 \cdot 12}} > \frac{200-175}{\sqrt{25 \cdot 12}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{12}}\right) = \underline{1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{12}}\right)} \approx 0{,}07445$$

$E(X) = 7 \qquad D^2(X) = 12$

$$\frac{a+b}{2} \qquad a+b = 14 \qquad b = 14 - a$$

$$\frac{(b-a)^2}{12} = 12 \qquad b - a = 12 \qquad 14 - 2a = 12 \qquad [a = 1] \quad [b = 13]$$

$$P(X > 5) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$



$$S_n \sim N(n \cdot 7, \sqrt{n} \cdot \sqrt{12})$$

$$P(S_n > 300) = 0{,}9$$

$$P\left(\frac{S_n - 7n}{\sqrt{n \cdot 12}} > \underbrace{\frac{300 - 7n}{\sqrt{n \cdot 12}}}_{a}\right) = 0{,}9 = 1 - \Phi(a) \qquad \overbrace{0{,}1}$$

$$\frac{300 - 7n}{\sqrt{n \cdot 12}} = a = \Phi^{-1}(0{,}1) = 0{,}397$$

$$300 - 7n = a\sqrt{n \cdot 12}$$

$$7n + 0{,}397 \cdot \sqrt{12}\,\sqrt{n} - 300 = 0$$

$$7n + 1{,}375\sqrt{n} - 300 = 0$$

$$\sqrt{n}_{1,2} = \frac{-1{,}375 \pm \sqrt{8401{,}89}}{14} \quad \nearrow 6{,}449 \quad \searrow \ominus$$

$$n \geq 42$$

Információelmélet