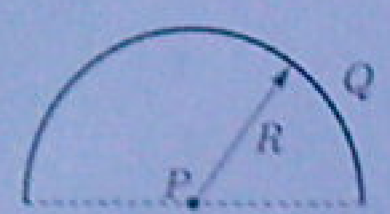
Elektromágneses terek (VIHVA204) **2010.01.15.**

Név: **Javítási példány**	Pontszám:	Javító:
NEPTUN:	**10**	**EVT**
Aláírás:		

Feladatonként 1 pont szerezhető. Csak a végeredményt írja rá a feladatlapra!

1. Határozza meg a $Q = 300\,\mathrm{nC}$ össztöltésű, egyenletesen töltött $R = 20\,\mathrm{cm}$ sugarú félkör alakú vonaltöltés által létrehozott elektromos térerősség nagyságát a P pontban!



$E = 42{,}91\,\mathrm{kV/m}$

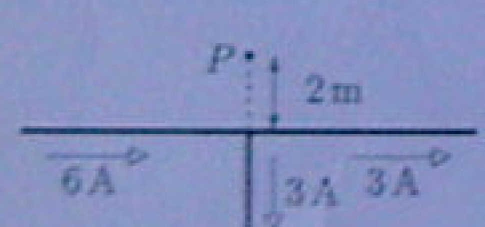
2. Légszigetelésű, $C = 50\,\mathrm{pF}$ kapacitású síkkondenzátor lemezei egymástól d távolságban vannak. A kondenzátort állandó, $U = 4{,}5\,\mathrm{V}$ feszültségre kapcsoljuk. Ezután a lemezeket engedjük $d/2$ távolsággal lassan *közeledni* egymáshoz. Mekkora munkát végez a *feszültségforrás* a lemezek közeledése során?

$W = 1{,}013\,\mathrm{nJ}$

3. Homogén vezetőanyaggal kitöltött térben egy $I = 18\,\mathrm{A}$ áramú pontszerű áramforrás helyezkedik el. Egy képzeletbeli, $a = 20\,\mathrm{cm}$ oldalú négyzetlap középpontjában az áramsűrűség vektor iránya merőleges a négyzetlapra. A pontforrás és a négyzetlap távolsága $d = a/2$. Adja meg a négyzetlapon átfolyó I_n áramot!

$I_n = 3\,\mathrm{A}$

4. Az ábrán látható T-elágazás szárai végtelen félegyeneseknek tekinthetők. Adja meg a H mágneses térerősség nagyságát a vezetők síkjában fekvő P pontban!

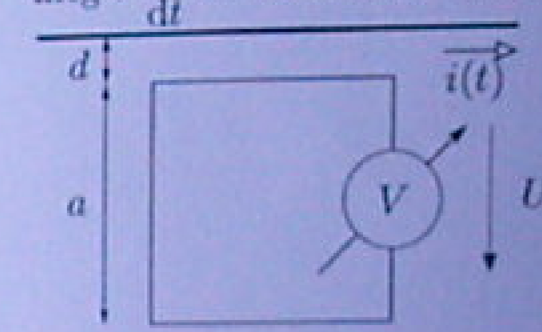


$H = 0{,}3581\,\mathrm{A/m}$

5. Ideális távvezeték hossza $h = \frac{7\Lambda}{4}$, ahol Λ a vezetéken mért hullámhossz szinuszos állandósult állapotban. A feszültség komplex amplitúdója a vezeték elején $U_1 = 400\,\mathrm{V}$, a végén $U_2 = j200\,\mathrm{V}$. Határozza meg az állóhullámarányt!

$\sigma = 2$

6. A négyzet alakú vezetőkeret a végtelen hosszú, $i(t)$ áramú vezető síkjában fekszik. Adja meg a $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ deriváltat, ha a voltmérő $U = 2\,\mathrm{mV}$ feszültséget jelez! ($a = 5d = 10\,\mathrm{cm}$)



$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -55{,}84\,\mathrm{kA/s}$

7. Kör keresztmetszetű, $d = 5\,\mathrm{mm}$ átmérőjű vezetőben f frekvenciájú szinuszos áram folyik. A szkinmélység az f frekvencián $\delta = 100\,\mu\mathrm{m}$. A vezető felszínén az áramsűrűség komplex amplitúdója $\mathbf{J} = \mathbf{n}_0 5\,\mathrm{kA/m^2}$, ahol $\mathbf{n}_0$ a vezető tengelyével párhuzamos egységvektor. Adja meg a vezető áramának komplex amplitúdóját!

$I = 5{,}553 e^{-j45^\circ}\,\mathrm{mA}$

8. Levegőben terjedő, λ hullámhosszú síkhullám merőlegesen esik egy ideális vezető lemezre. Az elektromos térerősség amplitúdója a lemeztől $\lambda/8$ távolságban $E = 150\,\mathrm{V/m}$. Adja meg a mágneses térerősség amplitúdóját a lemez felszínén!

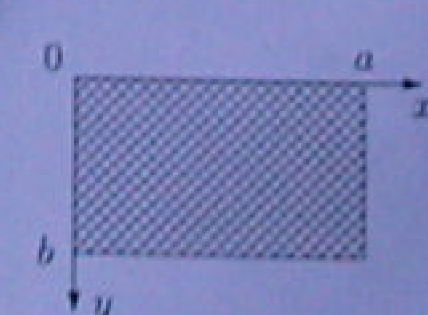
$H = 0{,}5632\,\mathrm{A/m}$

9. Hertz-dipólustól $r = 200\,\mathrm{m}$ távolságban a Poynting-vektor időátlagának maximális értéke $S_{\max} = 0{,}3\,\mathrm{mW/m^2}$. A dipólust $I = 5\,\mathrm{A}$ effektív értékű áram táplálja. Mekkora az antenna sugárzási ellenállása?

$R_S = 4{,}021\,\Omega$

10. A csőtápvonal oldalai $a = 2b = 4\,\mathrm{cm}$. Határozza meg a tápvonalban a pozitív z irányban áramló teljesítményt, ha a $z = 0$ síkban az elektromos és mágneses térerősség komplex amplitúdója

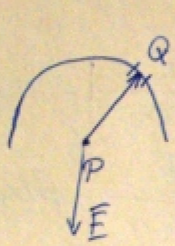
$$\mathbf{E} = 1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathbf{e}_y\ \mathrm{kV/m} \quad \text{ill.} \quad \mathbf{H} = -2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathbf{e}_x\ \mathrm{A/m}.$$



$P = 0{,}4\,\mathrm{W}$

Elektromágnesesterek 2010. 01. 15.

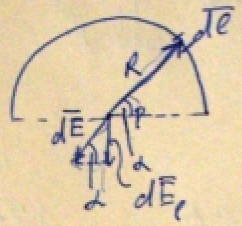
(1)



$Q = 300\,nC$

$R = 20\,cm = 0{,}2\,m$

$E|_P = ?$



$dQ = \frac{dl}{R\pi} Q$

$dl = d\alpha \cdot R$

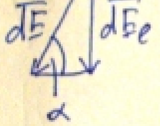
$\sin\alpha = \frac{dl}{R}$

$\sin\alpha \approx d\alpha$ (kis szögekre)

Az eredő térerősség lefele mutat. $d\bar{l}$ elemi szakaszok = ponttöltés.

$d\bar{E}$-nek csak a lefele mutató komponense marad meg. (szimmetria)

$$E' = \int d\bar{E}_l = \int d\bar{E} \cdot \sin\alpha = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\sin\alpha\, d\alpha}_{2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$



$d\bar{E}_l = d\bar{E}\,\sin\alpha$

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\ ;\ dQ = \frac{dl}{R\pi}Q;\ dl = d\alpha\, R$$

$$E = \frac{300 \cdot 10^{-9}\,C}{2\pi^2 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}\frac{As}{Vm} \cdot 0{,}2^2\,m^2} = \underline{\underline{42{,}97\ \frac{kV}{m}}}$$

(2)

$C = 50\,pF$

$d \to d/2$

$U = 4{,}5\,V$

$W = ?$

$$C_1 = \varepsilon\frac{A}{d}\quad,\ C_2 = \varepsilon\frac{A}{\frac{d}{2}}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{2} \to C_2 = 2C_1 = 100\,pF$$

$W_1 = \frac{1}{2}Q_1 U\quad,\ Q_1 = C_1 U = 50\,pF \cdot 4{,}5\,V = 225\,pC$

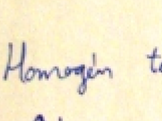
$W_2 = \frac{1}{2}Q_2 U\qquad Q_2 = C_2 U = 2Q_1 = 450\,pC$

! de, U = állandó

$W = QU$

$$\Delta W = Q_1 U_1 - Q_2 U_1 = \Delta Q U = 225\,pC \cdot 4{,}5\,V = \underline{\underline{1{,}012\,nJ}}$$

(3) Homogén tér,

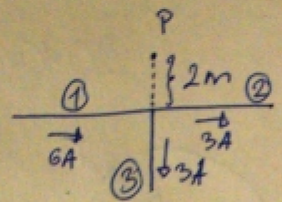


Olyan mintha kocka közepén lenne a pontforrás. 6 oldal, egyenletes eloszlás

$I = 18\,A$

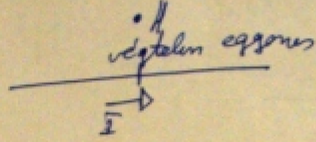
$I_{négyzet} = \frac{18}{6}A = \underline{\underline{3\,A}}$

4



3: nem hoz létre mágneses teret P-ben

1, 2: végtelen félegyenesek



$H = \frac{I}{2\pi r}$ - egyenes

$H = \frac{\frac{I}{2}}{2\pi r}$ - félegyenes

$H_P = ?$

$$H_p = \frac{3A}{2\pi \cdot 2m} + \frac{1,5A}{2\pi \cdot 2m} = 0,358 \frac{A}{m}$$

5

$z = h = \frac{7\Lambda}{4}$

$U_1 = 400V$

$U_2 = j200V$

$\sigma = ?$

ideális távvezeték

$$\sigma = \frac{1 + |r_2|}{1 - |r_2|}$$

$$U_1 = U_2^+ \left(e^{j\beta z} + r_2 e^{-j\beta z}\right)\Big|_{z=h}$$

$$U_{max} = |U_2^+| (1 + |r_2|)$$

$$U_{min} = |U_2^+| (1 - |r_2|)$$

$$\beta h = \frac{7\Lambda}{4} \cdot \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{7\pi}{2} \left(\to \frac{\pi}{2}\right)$$

$$e^{j\beta h} = -j$$

$$e^{-j\beta h} = +j$$

$$U_2 = U_2^+ \left(e^{j\beta z} + r_2 e^{j\beta z}\right)\Big|_{z=\emptyset}$$

I. $U_1 = U_2^+ (-j + j r_2)$

II. $U_2 = U_2^+ (1 + r_2)$

$$U_2^+ = \frac{U_2}{1 + r_2}$$

$$U_1 = \frac{U_2}{1 + r_2} \cdot j (r_2 - 1)$$

$$U_1 + U_1 r_2 = j U_2 r_2 - j U_2$$

$$U_1 r_2 - j U_2 r_2 = -j U_2 - U_1$$

$$r_2 = \frac{-jU_2 - U_1}{U_1 - jU_2}$$

$$r_2 = \frac{200 - 400}{400 + 200} = -\frac{1}{3}$$

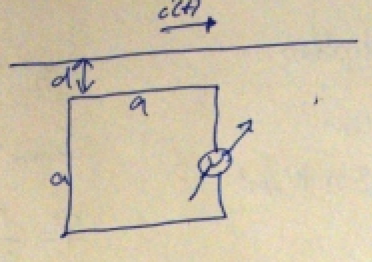
$$\sigma = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \underline{\underline{2}}$$

⑥ $U = 2\,mV$

$a = 5d = 10\,cm = 0{,}1\,m$

$d = 0{,}02\,m$

$\frac{di}{dt} = ?$



Faraday-féle indukció, $u = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$; $\phi = \int_A \bar{B}\,d\bar{A}$, $B = \mu H$, $H = \frac{I}{2\pi r}$

$$\phi = \int_d^{a+d} \mu \frac{I}{2\pi r} a\,dr = \frac{\mu I a}{2\pi}\int_d^{a+d} \frac{1}{r}dr = \frac{\mu I a}{2\pi}\left[\ln r\right]_d^{a+d} = \frac{\mu I a}{2\pi}\ln\frac{a+d}{d}$$

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \quad 2\,mV = -\frac{\partial\left(\frac{\mu I a}{2\pi}\ln\frac{a+d}{d}\right)}{\partial t} = -\frac{\mu a}{2\pi}\ln\frac{a+d}{d}\cdot\frac{\partial i(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(t)}{\partial t} = -\frac{U\,2\pi}{\mu_0 a \ln\frac{a+d}{d}} = -\frac{2\cdot 10^{-3}V\cdot 2\pi}{0{,}1m\, 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}\ln\frac{0{,}12m}{0{,}02m}} = \underline{\underline{-55{,}84\,\frac{kA}{s}}}$$

⑦ $d = 5\,mm \Rightarrow r = 2{,}5\,mm$

f

$\delta|_f = 100\,\mu m$

$\bar{J} = \bar{n}_0\, 5\,\frac{kA}{m^2}$

$\bar{I} = ?$

$Z = \frac{1+j}{\sigma\delta}$

$\bar{J} = \sigma\bar{E}$

$U = \int \bar{E}\,d\bar{l}$

$$\bar{I}Z = \int \bar{E}\,d\bar{l} = E\underbrace{\oint d\bar{l}}_{\text{kerület}} = E\,2\pi r = E\pi d$$

$$\bar{I}\,\frac{1+j}{\sigma\delta} = \frac{\bar{J}}{\sigma}\pi d$$

$$\bar{I}\,\frac{1+j}{\delta} = \bar{J}\pi d$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{J}\pi d\delta}{1+j}$$

$$\bar{I} = \frac{10^3\cdot 5\frac{kA}{m^2}\cdot\pi\cdot 5\cdot 10^{-3}m\cdot 100\cdot 10^{-6}m}{\sqrt{2}\,e^{j45°}}$$

$$\underline{\underline{\bar{I} = 5{,}553\cdot e^{-j45°}\,A}}$$

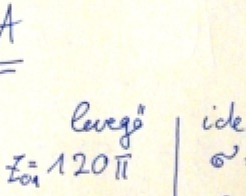
⑧ Síkhullám

$E| = 150\,\frac{V}{m}$

$\frac{\lambda}{8}$ távolságban

$H = ?$

levegő | ideális vezető



$\sigma = \infty$

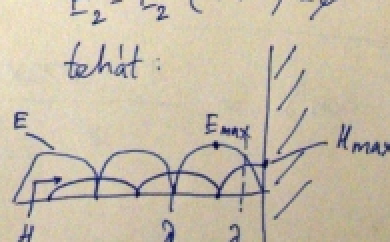
$Z_{02} = 0$

$r = -1$ (rövidzár)

állóhullám fog kialakulni

$E_2 = E_2^+(1+r) = 0$

tehát:



$$E_{max} = \frac{E|_{\lambda/8}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 212{,}132\,\frac{V}{m}$$

$$H = H_{max} = \frac{E_{max}}{Z_{01}} = \frac{212{,}132\,\frac{V}{m}}{120\pi\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}5627\,\frac{A}{m}}}$$

(9) Hertz-dipólus

$r = 200 m$

$S_{max} = 0,3\ mW/m^2$

$I_{eff} = 5A$

$R_S = ?$

Sugárzási ellenállás

$S_{max} = \frac{3}{2} S_{átl.}$

$P = \frac{1}{2} R_S \hat{I}_m^2$

$R_S = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$

$$\bar{P} = \oint \bar{S}\, d\bar{A} = I_{eff}^2 R_S \cdot 4\pi r^2 \; ; \; R_S = \frac{\frac{2}{3} S_{max} \cdot 4\pi r^2}{I_{eff}^2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m^2} \cdot 4\pi \cdot (200)^2 m^2}{(5A)^2}$$

↑ gömb felületen

$\underline{\underline{R_S = 4,021\,\Omega}}$

(10) Csőtápvonal

$a = 4cm = 0,04m$

$b = \frac{a}{2} = 2cm = 0,02\,m$

$\bar{E} = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\bar{e}_y\ \frac{kV}{m}$

$\bar{H} = -2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\bar{e}_x\ \frac{A}{m}$

$P = ?$

$$\bar{P} = \oint \bar{S}\, d\bar{A}$$

$$\bar{P} = b \int_0^a \frac{1}{2}\, \bar{E} \times H^*$$

$$\bar{E} \times \bar{H}^* = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & E_y & 0 \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{e}_z(-H_x E_y)$$

$$P = b \cdot \frac{1}{2} \int_0^a -(1000 \cdot (-2)) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = 1000b \int_0^a \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2} dx =$$

$$= 1000b \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{\frac{2\pi}{a}}\right]_0^a = 1000b\left[\left(\frac{a}{2} - \underbrace{\frac{a \cdot \sin 2\pi}{2\pi}}_{=0}\right) - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{a \sin 0°}{2\pi}\right)}_{=0}\right] =$$

$$= 1000b \cdot \frac{a}{2} = 500 \cdot a \cdot b = 500 \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 250\, a^2 = 250 \cdot (0,04)^2 = \underline{\underline{0,4\ W}}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$