ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGAZÁRTHELYI

2008. június 12.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (13 pont)

a) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = (y+1)^3 \frac{x^3}{x^4+1}$$

b) Hajtsa végre az $u = y^3 + 3x$ helyettesítést az alábbi kezdeti érték problémánál!

$$3y^2 y' = (y^3+3x+1)^3 \frac{x^3}{x^4+1} - 3, \qquad y(1) = -1$$

Milyen differenciálegyenlethez jutott? Ne oldja meg a kapott differenciálegyenletet!

1a, $\boxed{8}$ $y \equiv -1$ (1) megoldás (egyensúlyi helyzet)

$y \neq -1$: $\displaystyle\int \frac{dy}{(y+1)^3} = \int \frac{x^3\,dx}{x^4+1}$ (2)

$-\frac{1}{2}(y+1)^{-2}$ (2) $= \frac{1}{4}\ln(x^4+1)$ (2) $+ C$ (1)

$y(x) = \pm\left(-\frac{1}{2}\ln(x^4+1) - 2C\right)^{-\frac{1}{2}} - 1$ (2); $C \in \mathbb{R}$

b, $\boxed{5}$ $u'(x) = 3y^2(x)\,y'(x) + 3$ (2)

$u' = (u+1)^3 \frac{x^3}{x^4+1}$ (1); $u(1) = (-1)^3 + 3\cdot 1 = 2$ (1)

Szeparálható differenciálegyenlet. (1)

2. feladat (10 pont)

A deriváltfüggvény sorfejtésének felhasználásával állítsa elő az

$$f(x) = \arcsin x$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését! Az első 3 nem nulla tagot írja ki elemi műveletekkel! Mi a sor konvergenciasugara? (Ne próbálkozzon a Taylor sor definíciójával!)

2, $f(x) = 0 + \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ (2) $= \displaystyle\int_{t=0}^{x} (1-t^2)^{-1/2}\,dt = \int_{t=0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n}(-t^2)^n\right)$ (2) $dt =$ $R=1$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \int_{t=0}^{x} t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (2) $= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}x^5 + \dots$ (2) $R = 1$ (2)

3. feladat (10 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorfejtését és adja meg annak konvergencia tartományát!

$$f(x) = \sin(2x^3), \qquad g(x) = \frac{x}{2-6x}$$

3, $f(x) = \sin(2x^3) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2x^3)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{6k+3}$ (4)

$R = \infty$ (1)

(4) $g(x) = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1-3x} = \frac{x}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{2}\cdot x^{k+1}$, ha $|3x| < 1$, azaz $|x| < \frac{1}{3} = R$ (1)

4. feladat (12 pont)

a) Definiálja az $\underline{a}$ pontbeli iránymenti derivált fogalmát!

b) Adjon feltételt arra, hogy egy $\underline{a}$ pontban bármely irányban létezzen az iránymenti derivált! Hogyan számítható ki ez esetben az iránymenti derivált?

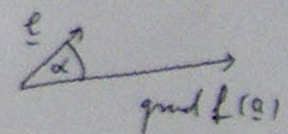
c) Ezen feltétel mellett milyen irányú és mennyi a maximális, illetve a minimális iránymenti derivált az $\underline{a}$ pontban? Indokoljon!

4, a, $\boxed{3}$ $|\underline{e}| = 1$; $\displaystyle\frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = \lim_{\substack{\cancel{t\to 0}\\ (t\to 0+0)}} \frac{f(\underline{a}+t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t}$

b, $\boxed{3}$ Ha f totálisan differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor

$\exists\ \displaystyle\frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = \underline{e}\cdot \operatorname{grad} f(\underline{a})$

c, $\boxed{6}$ $\underline{e}\cdot \operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underbrace{|\underline{e}|}_{1}\cdot\left|\operatorname{grad} f(\underline{a})\right|\cdot\cos\alpha$ (2)



Maximális, ha $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \underline{e} \parallel \operatorname{grad} f$, és azonos irányúak. (1)

$\max\left(\frac{df}{d\underline{e}}\right) = |\operatorname{grad} f|$ (1)

Minimális, ha $\cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi \Rightarrow \underline{e} \parallel \operatorname{grad} f$, és ellentétes irányúak. (1)

$\min\left(\frac{df}{d\underline{e}}\right) = -|\operatorname{grad} f|$ (1)

5. feladat (15 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+3x-2y, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Folytonos-e a függvény az origóban?

b) $f'_x(0,0)=?$, $f'_y(0,0)=?$ (A definícióval dolgozzon!)

c) $f'_y(x,y)=?$, ha $(x,y)\neq(0,0)$.

5, a, $\boxed{5}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\underbrace{x}_{\to 0}\cdot\underbrace{\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}_{\to 1}+\underbrace{3x}_{\to 0}-\underbrace{2y}_{\to 0}\right)=0\cdot1+0+0=0=f(0,0)$

folytonos az origóban!

b, $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x\sin(x^2)}{x^2}+3x\right)\cdot\dfrac{1}{x}=1+3=\underline{\underline{4}}$ (4)

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{y}(0+0-2y-0)=\underline{\underline{-2}}$ (4)

c, $(x,y)\neq(0,0)$

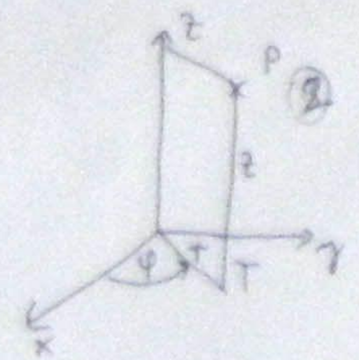
$\boxed{3}$ $f'_y(x,y)=\dfrac{2xy\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}-\dfrac{x\sin(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}-2$

6. feladat (12 pont)*

a) Ismertesse a hengerkoordinátás transzformációt!
(Készítsen egy ábrát, melyből kiderül a hengerkoordináták jelentése.
Írja fel a Descartes koordinátákat a hengerkoordinátákkal kifejezve!)

b) $\iiint\limits_V y^2\,dV=?$ $V:\ 0\le z\le 3,\ x^2+y^2\le 4$

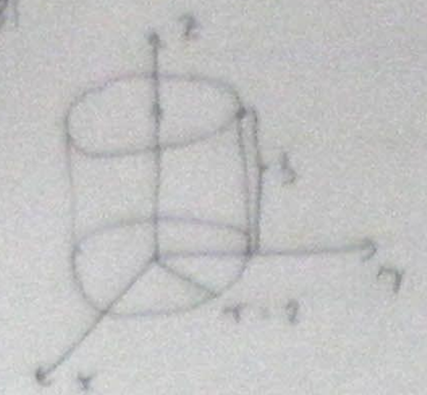
6, a, $\boxed{4}$



(2)

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\varphi\\ y&=r\sin\varphi\\ z&=z\end{aligned}\right\}\ (2)$$

b, $\boxed{8}$ $x^2+y^2\le4 \iff 0\le r\le 2$



Jacobi det

$$\iiint\limits_V y^2\,dV=\int\limits_{z=0}^{3}\int\limits_{r=0}^{2}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}(r\sin\varphi)^2\,r\,d\varphi\,dr\,dz=\ (3)\ (1)$$

$$=\underbrace{\left(\int\limits_{z=0}^{3}1\,dz\right)}_{3\ (1)}\cdot\underbrace{\left(\int\limits_{r=0}^{2}r^3\,dr\right)}_{\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2=4\ (1)}\cdot\underbrace{\left(\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\right)}_{2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi\ (2)}=\underline{\underline{12\pi}}$$

7. feladat (12 pont)*

$$u(x,y)=3x^2y-y^3$$

a) Mutassa meg, hogy u lehet egy reguláris komplex változós függvény valós része!

b) Határozza meg a függvény képzetes részét!

7, a, $\boxed{4}$ $\Delta u=u''_{xx}+u''_{yy}=6y-6y=0$ ✓ (4)

b, Cauchy–Riemann egyenletek alapján:

$\boxed{8}$ (2) $\left.\begin{aligned}u'_x&=6xy\overset{!}{=}v'_y\\ -u'_y&=-3x^2+3y^2=v'_x\end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned}&\Rightarrow v=\int 6xy\,dy=3xy^2+C(x)\ (2)\\ &\Rightarrow v=\int(-3x^2+3y^2)\,dx=-x^3+3y^2x+\tilde{C}(y)\ (2)\end{aligned}$

A kettő összevetéséből adódik:

$v(x,y)=\underline{\underline{3xy^2-x^3+C}}$, $C\in\mathbb{R}$ (2)

5. feladat (15 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+3x-2y, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Folytonos-e a függvény az origóban?

b) $f'_x(0,0)=?$, $f'_y(0,0)=?$ (A definícióval dolgozzon!)

c) $f'_y(x,y)=?$, ha $(x,y)\neq(0,0)$.

5, a, $\boxed{6}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\underset{\downarrow\,0}{x}\,\underset{\downarrow\,1}{\boxed{\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}}+\underset{\downarrow\,0}{3x}-\underset{\downarrow\,0}{2y}\right)=0\cdot1+0+0=0=f(0,0)$$

folytonos az origóban!

b, $\boxed{8}$

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\left(\underset{\downarrow\,1}{\frac{x\sin(x^2)}{x^2}}+3x\right)\cdot\frac{1}{x}=1+3=\underline{4}\quad 4$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{1}{y}\left(0+0-2y-0\right)=\underline{-2}\quad 4$$

c, $(x,y)\neq(0,0)$ $\boxed{3}$

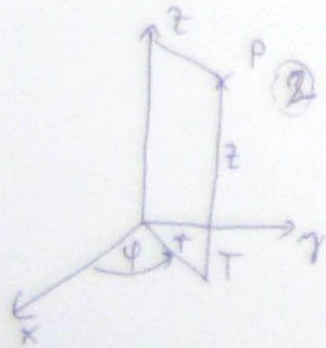
$$f'_y(x,y)=\frac{2xy\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}-\frac{x\sin(x^2+y^2)\cdot2y}{(x^2+y^2)^2}-2$$

6. feladat (12 pont)*

a) Ismertesse a hengerkoordinátás transzformációt!
(Készítsen egy ábrát, melyből kiderül a hengerkoordináták jelentése.
Írja fel a Descartes koordinátákat a hengerkoordinátákkal kifejezve!)

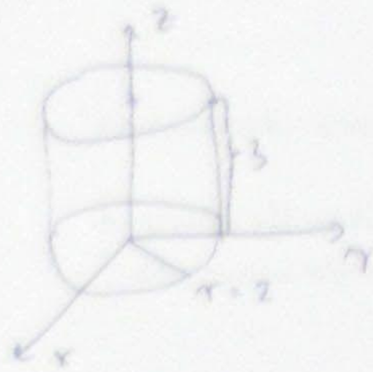
b) $\iiint_V y^2\,dV=?$ $V:\ 0\le z\le3,\ x^2+y^2\le4$

6, a, $\boxed{4}$



$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\varphi\\ y&=r\sin\varphi\\ z&=z\end{aligned}\right\}\ 2$$

b, $x^2+y^2\le4\iff0\le r\le2$ $\boxed{8}$



Jacobi det. 3

$$\iiint_V y^2\,dV=\int_{z=0}^{3}\int_{r=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(r\sin\varphi)^2\cdot r\,d\varphi\,dr\,dz=\quad 1$$

$$=\underbrace{\left(\int_{z=0}^{3}1\,dz\right)}_{3\ (1)}\cdot\underbrace{\left(\int_{r=0}^{2}r^3\,dr\right)}_{\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2=4\ (1)}\cdot\underbrace{\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\right)}_{2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi\ (2)}=\underline{12\pi}$$

7. feladat (12 pont)*

$$u(x,y)=3x^2y-y^3$$

a) Mutassa meg, hogy u lehet egy reguláris komplex változós függvény valós része!

b) Határozza meg a függvény képzetes részét!

7, a, $\boxed{4}$ $\Delta u=u''_{xx}+u''_{yy}=6y-6y=0$ ✓ 4

b, Cauchy–Riemann egyenletek alapján: $\boxed{8}$

$$2\left\{\begin{aligned}u'_x&=6xy=v'_y\\ -u'_y&=-3x^2+3y^2=v'_x\end{aligned}\right.\quad\begin{aligned}&\Rightarrow v=\int6xy\,dy=3xy^2+C(x)\ 2\\ &\Rightarrow v=\int(-3x^2+3y^2)\,dx=-x^3+3y^2x+\tilde{C}(y)\ 2\end{aligned}$$

A kettő összevetéséből adódik:

$$v(x,y)=\underline{3xy^2-x^3+C},\quad C\in\mathbb{R}\quad 2$$

8. feladat (16 pont)*

a) Hogyan számoljuk ki $\ln z$, illetve $\operatorname{Ln} z$ értékét?
b) Adja meg az alábbi z_i komplex számok valós és képzetes részét!

$$z_1 = e^{1-3j}; \quad z_2 = \ln(-4j); \quad z_3 = \operatorname{Ln}(-4j); \quad z_4 = (-4j)^{2j}$$

8, a, $z = |z| \cdot e^{j\varphi}$; $\varphi \in [-\pi, \pi)$ 1

2

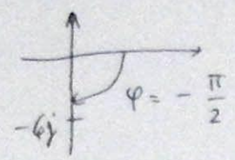
$\ln z = \ln |z| + j\varphi$

$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + j(\varphi + 2k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$ 1

b,

3 $z_1 = e^{1-3j} = e(\cos 3 - j \sin 3) = \underline{\underline{e \cos 3 + j \cdot (-e \sin 3)}}$

3 $z_2 = \ln(-4j) = \underline{\underline{\ln 4 - j\frac{\pi}{2}}}$



2 $z_3 = \operatorname{Ln}(-4j) = \underline{\underline{\ln 4 + j\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}}$; $k \in \mathbb{Z}$

4 $z_4 = (-4j)^{2j} = e^{\ln(-4j) \cdot 2j} = \exp\left(2j\left(\ln 4 - j\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= \exp(\pi + 2j \ln 4) = \underline{\underline{e^{\pi} \cos(2 \ln 4) + j e^{\pi} \sin(2 \ln 4)}}$

A *-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni!

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (10 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y' - 3x^2 y = x^2$$

9, $y' = x^2(1 + 3y)$ szeparálható (De tekinthető inhomogén lineárisnak is!)

$y \equiv -\frac{1}{3}$ megoldás 2

$y \neq -\frac{1}{3}$: $\displaystyle\int \frac{dy}{1+3y} = \int x^2 \, dx$ 2

$+\frac{1}{3} \ln |1 + 3y| = \frac{1}{3} x^3 + C$ 3 3 $\left(\cancel{|1+3y| = \frac{1}{A e^{x^3}}, A > 0} \right.$

$\cancel{1 + 3y = \pm B e^{-x^3}} \Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{1}{3} + D e^{x^3}}}$; $\left. \cancel{D \in \mathbb{R}} \right)$

10. feladat (10 pont)

$$f(x, y) = \frac{x - 2y}{3x + 5y}$$

Írja fel a $(2, -1)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

10, $f(2, -1) = \dfrac{2 + 2}{6 - 5} = 4 = z_0$ 1

$f'_x(x, y) = \dfrac{1 \cdot (3x + 5y) - 3(x - 2y)}{(3x + 5y)^2}$ 2 ; $f'_x(2, -1) = \dfrac{1 - 3 \cdot 4}{1^2} = -11$ 1

$f'_y(x, y) = \dfrac{-2(3x + 5y) - 5(x - 2y)}{(3x + 5y)^2}$ 2 ; $f'_y(2, -1) = \dfrac{-2 \cdot 1 - 5 \cdot 4}{1^2} = -22$ 1

$z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0)$ 2 ; $\underline{\underline{z - 4 = -11(x - 2) - 22(y + 1)}}$ 1