## 4. vizsga

A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. Amennyiben egy feladat máshogy nem rendelkezik, a számszerű végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsük, vagy normál tört alakban adjuk meg. Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. a) Legyenek $A, B \subset \Omega$ események. Milyen feltételek mellett és hogyan definiáljuk a $B$-nek az $A$-ra vett feltételes valószínűségét?

   b) Mondjuk ki a Bayes-tételt. (Elegendő az előadáson "egyszerű Bayes-tételnek" nevezett alakot kimondani, de a teljes valószínűség tételével kombinált alak is megfelelő.)

2. Egy 32 lapos magyarkártya-pakliban 8 darab piros lap található. A pakli megkeverése után húzunk egy lapot, és ha az piros, akkor egy másodikat is (egyéb esetben megállunk az első húzás után). Továbbá, ha a második húzott lap is piros, akkor egy harmadik lapot is húzunk (egyéb esetben ismét megállunk). Mi a valószínűsége, hogy pontosan 2 darab piros lapot húzunk?

3. Egy urnában 3 fehér és 3 piros golyó van, melyekből véletlenszerűen kihúzunk összesen 3 golyót visszatevés nélkül. Jelölje $X$ a húzott piros golyók számát. Határozzuk meg az $X$ várható értékét és szórását.

4. Egy adott típusú villanykörte $X$ élettartama (években mérve) exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és tudjuk, hogy $e^{-1}$ a valószínűsége annak, hogy a körte két évnyi használat során nem ég ki. Határozzuk meg azt az $y$ valós számot, melyre igaz, hogy $1/2$ annak a valószínűsége, hogy a körte kevesebb, mint $y$ év használat alatt kiég, azaz, amelyre a $\mathbb{P}(X < y) = 1/2$ egyenlet teljesül. (Ezt az $y$ számot az $X$ mediánjának nevezzük.)

5. Az $X$ és $Y$ valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat, amelyből két értéket kitöröltek. Határozzuk meg az $X$ és az $Y$ marginális eloszlását (peremeloszlását), ha tudjuk, hogy $\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2}$.

| $Y$ \ $X$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| 0 | | 1/2 |
| 3 | 1/3 | |

6. Egy bevásárlóközpontban a látogatók száma egy hétköznapnak egy adott órájában normális eloszlást követ. Egymás után 10 hétköznap megszámoljuk a látogatókat ebben az órában, és a következő számokat kapjuk: 1986, 1870, 2030, 2067, 2172, 2041, 1994, 2022, 2012, 2146. Szerkesszünk 95%-os szignifikanciaszintű konfidenciaintervallumot a látogatók számának várható értékére, ha a szórás értékét 78-nak tételezzük fel. Hány elemű mintára volna szükség, ha azt szeretnénk, hogy az intervallum hossza legfeljebb 30 legyen?

| Eloszlás neve | Jelölés | ran$X$ | $\mathbb{P}(X=k)$ v. $F_X(t)$ | $f_X(t)$ | $\mathbb{E}(X)$ | $\mathbb{D}^2(X)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| indikátor | $\mathbf{1}(p)$ | $\{0,1\}$ | $1-p,\ p$ | - | $p$ | $p(1-p)$ |
| binomiális | $B(n;p)$ | $\{0,1,\ldots,n\}$ | $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ | - | $np$ | $np(1-p)$ |
| geometriai | $Geo(p)$ | $\mathbb{N}^+$ | $(1-p)^{k-1}p$ | - | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| egyenletes | $U(a;b)$ | $(a;b)$ | $\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$) | $\frac{1}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$) | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| exponenciális | $Exp(\lambda)$ | $[0;\infty)$ | $1-e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0;\infty)$) | $\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0;\infty)$) | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |
| normális | $N(\mu;\sigma^2)$ | $\mathbb{R}$ | $\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |

## A Student-eloszlás kvantiliseinek táblázata

| | Szignifikanciaszint $(1-\varepsilon)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Szabadsági fok** | **0,9** | **0,95** | **0,98** | **0,99** | **0,999** |
| **1** | **6,314** | **12,706** | **31,821** | **63,657** | **636,619** |
| **2** | **2,920** | **4,303** | **6,965** | **9,925** | **31,599** |
| **3** | **2,353** | **3,182** | **4,541** | **5,841** | **12,924** |
| **4** | **2,132** | **2,776** | **3,747** | **4,604** | **8,610** |
| **5** | **2,015** | **2,571** | **3,365** | **4,032** | **6,869** |
| **6** | **1,943** | **2,447** | **3,143** | **3,707** | **5,959** |
| **7** | **1,895** | **2,365** | **2,998** | **3,499** | **5,408** |
| **8** | **1,860** | **2,306** | **2,896** | **3,355** | **5,041** |
| **9** | **1,833** | **2,262** | **2,821** | **3,250** | **4,781** |
| **10** | **1,812** | **2,228** | **2,764** | **3,169** | **4,587** |
| **11** | **1,796** | **2,201** | **2,718** | **3,106** | **4,437** |
| **12** | **1,782** | **2,179** | **2,681** | **3,055** | **4,318** |
| **13** | **1,771** | **2,160** | **2,650** | **3,012** | **4,221** |
| **14** | **1,761** | **2,145** | **2,624** | **2,977** | **4,140** |
| **15** | **1,753** | **2,131** | **2,602** | **2,947** | **4,073** |
| **16** | **1,746** | **2,120** | **2,583** | **2,921** | **4,015** |
| **17** | **1,740** | **2,110** | **2,567** | **2,898** | **3,965** |
| **18** | **1,734** | **2,101** | **2,552** | **2,878** | **3,922** |
| **19** | **1,729** | **2,093** | **2,539** | **2,861** | **3,883** |
| **20** | **1,725** | **2,086** | **2,528** | **2,845** | **3,850** |
| **21** | **1,721** | **2,080** | **2,518** | **2,831** | **3,819** |
| **22** | **1,717** | **2,074** | **2,508** | **2,819** | **3,792** |
| **23** | **1,714** | **2,069** | **2,500** | **2,807** | **3,768** |
| **24** | **1,711** | **2,064** | **2,492** | **2,797** | **3,745** |
| **25** | **1,708** | **2,060** | **2,485** | **2,787** | **3,725** |
| **26** | **1,706** | **2,056** | **2,479** | **2,779** | **3,707** |
| **27** | **1,703** | **2,052** | **2,473** | **2,771** | **3,690** |
| **28** | **1,701** | **2,048** | **2,467** | **2,763** | **3,674** |
| **29** | **1,699** | **2,045** | **2,462** | **2,756** | **3,659** |
| **30** | **1,697** | **2,042** | **2,457** | **2,750** | **3,646** |
| **40** | **1,684** | **2,021** | **2,423** | **2,704** | **3,551** |
| **50** | **1,676** | **2,009** | **2,403** | **2,678** | **3,496** |
| **60** | **1,671** | **2,000** | **2,390** | **2,660** | **3,460** |
| **80** | **1,664** | **1,990** | **2,374** | **2,639** | **3,416** |
| **100** | **1,660** | **1,984** | **2,364** | **2,626** | **3,390** |
| **500** | **1,648** | **1,965** | **2,334** | **2,586** | **3,310** |

A sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

| x | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |