Bevezetés a számításelméletbe II.
2. pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. május 12.

Általános alapelvek.

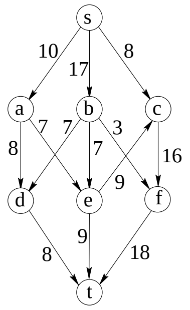
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



* * * * *

Jó folyam, jó indoklás a maximalitásra 5 pont, jó vágás, jó indoklás a minimalitásra szintén 5 pont. Picit hiányos indoklás esetén 1-1 pontot vonjunk le, nagyobb hiány esetén ennél többet (tipikus példa: jó folyam, jó vágás, semmi indoklás - ez max. 6 pont, ha viszont a két érték nem egyezik, akkor ennél jóval kevesebb). Ha valaki a javítóutas algoritmust használja, de hibázik (és ezért nem jön ki megoldás), akkor max. 2-3 pontot kaphat a folyam részre, ha kiderül, hogy hogy keresne minimális vágást, akkor erre is adható max. 2-3 pont. Ha a hibá(k)ról nem derül ki, hogy számolási vagy elvi hiba, akkor szigorúan járjunk el, azaz tekintsük elvinek.

2. Egy 10 csúcsú teljes gráfból törlünk két nem csatlakozó élet. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, melyre a kapott gráf k-szorosan összefüggő.

* * * * *

Mivel a kapott gráfnak (nevezzük G-nek) van olyan csúcsa, melynek foka 8, a keresett szám 8-nál nem lehet nagyobb. (1 pont)
Megmutatjuk másrészt, hogy G 8-szorosan összefüggő. Ehhez szükséges, hogy G-nek legyen legalább

9 csúcsa, ez természetesen teljesül. (1 pont)
Ezen kívül annak kell teljesülni, hogy bármely legfeljebb 7 csúcsot törölve G összefüggő marad. (1 pont)
Legfeljebb 7 csúcs törlése után visszamarad legalább három csúcs és bármely három csúcs által feszített részgráfnak legalább két éle lesz, (2 pont)
hiszen G-ből két nem csatlakozó élet töröltünk. (2 pont)
Így a visszamaradó gráfban bármely három pont közül bármely kettő közt lesz (legfeljebb 2 hosszú) út, (1 pont)
így a visszamaradó gráf összefüggő (hiszen bármely két csúcshoz választhatunk egy harmadikat tetszőlegesen, majd erre a három csúcsra alkalmazzuk az imént látott állítást.) (1 pont)
Mindezek alapján a keresett szám tehát 8. (1 pont)

Ha valaki nem legfeljebb, hanem pontosan 7 csúcs törlését vizsgálja, akkor (ha egyébként jó a megoldása) 9 pontot adhatunk (azaz az utolsó előtti 1 pont kivételével – indokolt esetben – megadhatjuk a pontokat).

3. Legyen n tetszőleges egész szám. Határozzuk meg a $3n^2-2n+1$ és n^2-n számok legnagyobb közös osztóját.

* * * * *

Az a és b egészek bármely közös osztója osztja az $a-kb$ számot is tetszőleges k egész esetén. (Lehet hivatkozni ehelyett az Euklideszi algoritmusra is, bár ez itt nem teljesen precíz.) (2 pont)
Ez alapján a keresett lnko. osztja a $(3n^2-2n+1)-3(n^2-n)=n+1$ számot. (2 pont)
Ezt felhasználva, az előbbihez hasonlóan, az lnko. osztja az $(n^2-n)-(n-2)(n+1)=2$ számot is, (3 pont)
ahonnan az lnko. vagy 1 vagy 2. (2 pont)
Mivel n^2-n mindig páros, az lnko. pontosan akkor lesz 2, ha $3n^2-2n+1$ páros, azaz ha n páratlan, minden más esetben pedig 1. (1 pont)

4. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész n-et, melyre $\varphi(n)=17$.

* * * * *

Ismert, hogy ha $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_r^{a_r}$, akkor $\varphi(n)=(p_1^{a_1}-p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2}-p_2^{a_2-1})\dots(p_r^{a_r}-p_r^{a_r-1})$. (1 pont)
Mivel $\varphi(n)=17$ prím, a fenti szorzat egyik tényezője 17. (2 pont)
Ekkor valamely i-re $a_i\geq 1$ és $p_i^{a_i}-p_i^{a_i-1}=p_i^{a_i-1}(p_i-1)=17$. (1 pont)
Így $(p_i-1)|17$, (2 pont)
ahonnan $p_i=2$ vagy $p_i=18$. (2 pont)
Mivel 2^{a_i-1} nem lehet 17, 18 pedig nem prím, p_i sem 2, sem 18 nem lehet, (1 pont)
vagyis a feltételnek megfelelő n szám nem létezik. (1 pont)

5. Oldjuk meg az

$$53x\equiv 3 \pmod{89}$$

lineáris kongruenciát.

* * * * *

53 és 89 lnko.-ja 1, ez osztja a 3-at, így lesz megoldás (mégpedig 1 darab modulo 89, de ezt nem muszáj itt megállapítani). (1 pont)
A kongruenciát Euklideszi algoritmussal oldjuk meg. Tudjuk, hogy $89x\equiv 0 \pmod{89}$. (1 pont)
Innen $36x=89x-53x\equiv 0-3 \pmod{89}$. (2 pont)

Így $17x = 53x - 36x \equiv 3 - (-3) = 6 \pmod{89}$, (2 pont)
ahonnan $2x = 36x - 2 \cdot 17x \equiv -3 - 2 \cdot 6 = -15 \pmod{89}$, (2 pont)
végül $x = 17x - 8 \cdot 2x \equiv 6 - 8 \cdot (-15) = 126 \equiv 37 \pmod{89}$. (2 pont)

Ha nem esik szó arról, hogy Euklideszi algoritmussal dolgozunk, akkor meg kell indokolni, hogy a kapott megoldás miért jó és miért nincs más megoldás. Ezek hiányáért 1-1 pontot vonjunk le. Természetesen a lineáris kongruencia másképp is megoldható, pl.
mivel 2 és 89 relatív prímek, a kongruenciát 2-vel szorozva az eredetivel ekvivalens (1 pont)
$106x \equiv 6 \pmod{89}$ kongruenciát kapjuk, ahonnan $17x \equiv 6 \pmod{89}$. (2 pont)
Mivel 5 és 89 is relatív prímek, a kongruenciát 5-tel szorozva az eredetivel ekvivalens (1 pont)
$85x \equiv 30 \pmod{89}$ kongruenciát kapjuk, ahonnan $-4x \equiv 30 \pmod{89}$. (2 pont)
A kongruenciát -2-vel osztva $2x \equiv -15 \pmod{89}$. (1 pont)
A modulus nem változott, hiszen -2 és 89 relatív prímek. (1 pont)
A jobb oldalhoz a modulust hozzáadva $2x \equiv 74 \pmod{89}$. (1 pont)
Mivel 2 és 89 még mindig relatív prímek, az $x \equiv 37 \pmod{49}$ kongruencia is ekvivalens az eredetivel. (1 pont)

6. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, melyre $n^7 - n$ osztható 9-cel.

* * * * *

$n^7 - n = n(n^6 - 1)$, így ha n vagy $n^6 - 1$ osztható 9-cel, akkor $n^7 - n$ is. (2 pont)
Így jó lesz minden olyan n egész, mely osztható 9-cel, (1 pont)
és jó lesz minden olyan n, ami relatív prím 9-cel (azaz nem osztható 3-mal), (1 pont)
hiszen ezekre az Euler-Fermat tétel szerint teljesül, hogy $n^6 \equiv 1 \pmod{9}$, (2 pont)
hiszen $\varphi(9) = 6$. (1 pont)
Hátra van azon számok vizsgálata, melyek oszthatók 3-mal, de nem oszthatók 9-cel. Mivel ilyenkor $n^6 - 1$ nem osztható 3-mal, (1 pont)
az $n(n^6 - 1) = n^7 - n$ szorzat nem lesz osztható 9-cel. (1 pont)
A feltételnek megfelelő n számok tehát pontosan a 3-mal nem osztható számok és a 9-cel osztható számok. (1 pont)