INFO AN2. ZH2 MEGOLDÁS | –1– | 2018. 05. 03.

α VARIÁNS

1, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}(x-2)^n$; $a_n = \frac{1}{n\cdot 3^n}$ Hányados kritérium:

$\boxed{8}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 3^n}{1} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3 \quad (3)$$

Végpontok:

i, $x = x_0 + R = 2 + 3 = 5$-ben:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot \cancel{3^n}}\cdot\cancel{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty \quad (2)$$

ii, $x = x_0 - R = 2 - 3 = -1$-ben

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}\cdot(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$ konvergens, mert Leibniz (3)

K.T. $= [-1, +5)$

—∘—

2, a, $x_0 = 2$; $f(x) = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x-2+5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-2}{5}\right)} =$ (2)

$\boxed{7}$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n (x-2)^n \quad (3)$$, ha $\left|-\frac{x-2}{5}\right| < 1$, azaz

$|x-2| < 5 = R$ (2)

b, $x_0 = 0$

$\boxed{7}$ $g(x) = e^{3x}\cdot \mathrm{sh}(2x) = e^{3x}\,\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$ (2) $= \frac{1}{2}\cdot e^{5x} - \frac{1}{2}e^{x} =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5^n}{n!} - \frac{1}{n!}\right)x^n \quad (3), \quad R = \infty \quad (2)$$

—∘—

3, a, $\boxed{5}$ $y = mx$ egyenes mentén:

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot mx}{x^2 + 2(mx)^2} = \frac{m}{1+2m^2}$$ függ m-től,

tehát nem létezik f határértéke az origóban, tehát f nem folytonos az origóban.

3, b, ha $(x,y)\neq(0,0)$:

[12] $f'_x(x,y)=\dfrac{y(x^2+2y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+2y^2)^2}=\dfrac{-x^2y+2y^3}{(x^2+2y^2)^2}$ (3)

$f'_y(x,y)=\dfrac{x(x^2+2y^2)-xy\cdot 4y}{(x^2+2y^2)^2}=\dfrac{-2xy^2+x^3}{(x^2+2y^2)^2}$ (3)

ha $(x,y)=(0,0)$

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\underbrace{f(h,0)}_{0}-\underbrace{f(0,0)}_{0}\big)=0$ (2) (1)

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\underbrace{f(0,h)}_{0}-\underbrace{f(0,0)}_{0}\big)=0$ (2) (1)

---

c, f az origóban nem deriválható totálisan, mert ott f

[5] nem folytonos. (2)

f az origón kívül mindenütt totálisan deriválható, mert $\forall(x,y)\neq(0,0)$ esetén $\exists\,\varepsilon>0$, hogy $K_\varepsilon(x,y)$-ban f'_x és f'_y léteznek és folytonosak. (3)

---

[5] d, $\dfrac{df(0,0)}{d\underline{v}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(t\underline{v})-\underbrace{f(0,0)}_{0}\big)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\dfrac{(t/\sqrt{2})\cdot(t/\sqrt{2})}{t^2/2+t^2}=$ (2)

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{3t}=\nexists$ Nem létezik! (3)

4, $f(x,y)=2x^2y+2xy-3y^2$

[18] $f'_x(x,y)=4xy+2y=2y(2x+1)=0$ (2)

$f'_y(x,y)=2x^2+2x-6y=0$ (2)

i, $y=0 \Rightarrow x^2+x=x(x+1)=0 \Rightarrow$ $(0,0)$ (2) és $(-1,0)$ (2) pontok

ii, $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\dfrac{2x^2+2x}{6}=-\dfrac{1}{12}$; $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{12}\right)$ pont (2)

4, (folyt.)

$$D(x,y) = \det\begin{bmatrix} 4y & 4x+2 \\ 4x+2 & -6 \end{bmatrix} = -24y - (4x+2)^2 \quad (2)$$

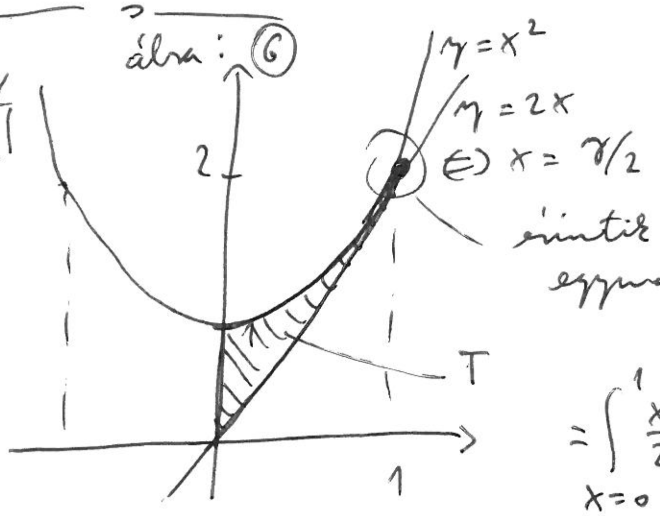
$(0,0)$-ban: $D(0,0) = -4 < 0 \Rightarrow$ nincs lok. szélsőérték. (2)

$(-1,0)$-ban: $D(-1,0) = -4 < 0 \Rightarrow$ ——— " ——— (2)

$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12})$-ban: $D(-1/2, -1/12) = 2 > 0 \Rightarrow$ lok. szélsőérték

$$4y\Big|_{y=-1/12} = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \text{lokális maximum} \quad (2)$$

5, $\boxed{18}$ ábra: (6)



$$\iint_T xy \, dT = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=2x}^{1+x^2} xy \, dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \frac{x}{2} \left[y^2 \right]_{y=2x}^{1+x^2} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \frac{x}{2} \left((1+x^2)^2 - 4x^2 \right) dx = \quad (4)$$

$$= \int_{x=0}^{1} \frac{1}{2} (x - 2x^3 + x^5) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}} \quad (4)$$

6, $\boxed{15}$

a, nem

b, igen

c, igen

d, nem

e, igen

IMSC:

a, $f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h^3}{h^2+0} - 0 \right) = 1$ (4p.)

$f'_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (0 - 0) = 0$ (4)

b, Ha létezne grad $f(0,0)$, akkor értéke $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ lenne.

Ellenőrizzük, hogy az „elhanyagolható rész" elég gyorsan tart-e 0-hoz: $f(x,y) - f(0,0) - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{x^3}{x^2+y^2} - x = \frac{-xy^2}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r \to 0} \frac{-r^3 \cos\varphi \sin^2\varphi}{r^3} = -\cos\varphi \sin^2\varphi$$ függ φ-től,

tehát $\frac{f(x,y) - f(0,0) - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|} \not\to 0 \Rightarrow \nexists$ grad $f(0,0)$ (7)

β VARIÁNS (TÖMÖR)

1, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}(x-3)^n$; $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{2(n+1)} \longrightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$ (3)

$\boxed{8}$ $x = 3+2$-ben div. (2) $x = 3-2$-ben konv. (3) $\Rightarrow$ K.T. $= [1, 5)$

2, a, $\boxed{7}$ $f(x) = \frac{1}{x+5} = \frac{1}{(x+2)+3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n (x+2)^n$ (5), ha $|x+2| < 3 = R$ (2)

b, $\boxed{7}$ $g(x) = e^{5x}\,\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}$ (2) $= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8^n}{n!} + \frac{2^n}{n!}\right)x^n$ (3), $R = \infty$ (2)

3, a, $\boxed{6}$ $f(x, mx) = \frac{m x^2}{3x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{3+m^2} \Rightarrow$ f nem folyt. az origóban.

b, $\boxed{12}$ $f'_x(x,y) = \frac{y(3x^2+y^2) - xy\cdot 6x}{(3x^2+y^2)^2}$ (3) ; $f'_y(x,y) = \frac{x(3x^2+y^2) - xy\cdot 2y}{(3x^2+y^2)^2}$ (3)

$f'_x(0,0)$ (3) $= f'_y(0,0) = 0$ (3)

c, $\boxed{5}$ mint α variáns d, $\nexists\ \frac{df(0,0)}{dv}$ (mint α variáns) (5)

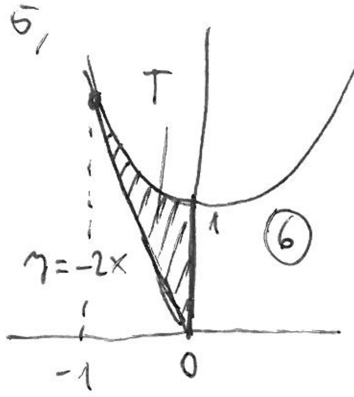
4, $f'_x(x,y) = 4xy - 2y = 2y(2x-1) = 0 \Rightarrow y = 0$ vagy $x = \frac{1}{2}$; $f'_y = 2x^2 - 2x - 6y = 0$

$\boxed{18}$ Vizsgálandó pontok: $(0,0)$, $(+1,0)$ és $\left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}\right)$ (egyenletek: (4) gyökök: (6))

$D(x,y) = -24y - (4x-2)^2$ (2)

$(0,0)$ – nyeregpont (2)
$(+1,0)$ – " – (2)
$\left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}\right)$ – lok. max. (2)

5,



$\iint_T xy\,dT = \int_{x=-1}^{0}\left(\int_{y=-2x}^{x^2+1} xy\,dy\right)dx$ (4) $= \int_{x=-1}^{0}\frac{x}{2}\left((x^2+1)^2 - 4x^2\right)dx$ (4)

$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{x^5}{2} - x^3 + \frac{x}{2}\right)dx = \frac{-1}{12}$ (4)

6,

a,	b,	c,	d,	e,
igen	igen	nem	igen	nem