ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI α variáns

2007. nov. 21.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x} + 3e^{5x} + 5}{2e^{3x} + 4e^{5x}} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(8x)}{2x \cdot \sin(3x)} = ?$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{e^{5x}}{e^{5x}}}_{=1} \dfrac{e^{-3x}+3+5e^{-5x}}{2e^{-2x}+4} = 1 \cdot \dfrac{0+3+0}{0+4} = \dfrac{3}{4}$

$\boxed{6}$

b.) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ azonosságot felhasználva:

$\boxed{7}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{2}\cdot\sin^2 4x}{\cancel{2}x \cdot \sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\left(\dfrac{\sin 4x}{4x}\right)^2}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\dfrac{3x}{\sin 3x}}_{\downarrow\, 1} \dfrac{4^2}{3} = \dfrac{16}{3}$

(L'H-lal is megoldható!)

2. feladat (13 pont)

a) Írja fel a differenciálhányados definícióját az értelmezési tartomány belső x_0 pontjában!

b) A derivált definíciójával határozza meg az

$$f(x) = \sqrt{3 + 2x}$$

függvény deriváltját az $x_0 = 3$ pontban!

c) Írja fel az $x_0 = 3$ pontbeli érintő egyenes egyenletét!

a.) $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$\boxed{2}$

b.) $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3+2(3+h)} - 3}{h} =$ 3

$\boxed{8}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+2h} - 3}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{9+2h}+3}{\sqrt{9+2h}+3} =$ 2

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{9+2h-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)} = \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\dfrac{h}{h}}_{=1} \dfrac{2}{\sqrt{9+2h}+3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ 3

α

an1zh2071121/1

c.) $y_e = f(3) + f'(3)(x-3) = 3 + \frac{1}{3}(x-3)$

$\boxed{3}$

3. feladat (16 pont)

$$f(x) = 3\pi + \arccos(4-x)$$

a) $D_f = ?$, $R_f = ?$, $f'(x) = ?$

b) Indokolja meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze!

c) $f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$

a.) $-1 \le 4-x \le 1$ (1) $\Rightarrow -5 \le -x \le -3 \Rightarrow 5 \ge x \ge 3$

$\boxed{8}$ $D_f = [3,5]$ (2)

$\arccos(4-x) \in [0,\pi]$ (1) $\Rightarrow R_f = [3\pi, 4\pi]$ (1)

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(4-x)^2}}(-1) \quad x \in (3,5)$ (3)

b.) $f'(x) > 0$, ha $x \in (3,5)$ és f folytonos $[3,5]$-ön

$\boxed{2}$ $\Rightarrow f$ szigorúan monoton nő $D_f = [3,5]$-ön

$\Rightarrow \exists\, f^{-1}$ D_f-en

c.) $y = 3\pi + \arccos(4-x) \Rightarrow y - 3\pi = \arccos(4-x)$

$\boxed{6}$ $\Rightarrow 4-x = \cos(y-3\pi) \Rightarrow x = 4 - \cos(y-3\pi)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 4 - \underbrace{\cos(x-3\pi)}_{=-\cos x}$ (4)

$D_{f^{-1}} = R_f = [3\pi, 4\pi]$ (2)

(α)

an1zh2071121/2.

4. feladat (21 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{x-3}{2-x}, & \text{ha } x < 2 \\ (4+3x^2)^{1/x}, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Hol és milyen szakadása van az f függvénynek?

Differenciálható-e a függvény $x = 2$-ben?

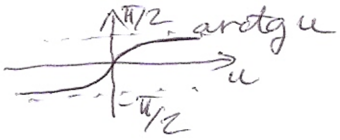
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

b) Írja fel a deriváltfüggvényt, ahol az létezik!

a) szakadása csak $x=2$-ben lehet, egyébként f

$\boxed{10}$ folytonos és differenciálható.

$f(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0} \operatorname{arctg} \underbrace{\left(\dfrac{\overset{\to -1}{x-3}}{\underset{\to +0}{2-x}}\right)}_{\to -\infty} = -\dfrac{\pi}{2}$ 3



$f(2+0) = f(2) = (4+3\cdot 4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4 \neq f(2-0)$ 1

$\Rightarrow x=2$-ben véges ugrása (elsőfajú szakadása) van. 1

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x} \underbrace{\dfrac{1-3/x}{2/x - 1}}_{\to -1}\right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$ 2 1

$f'(2) \nexists$, mert f nem folytonos $x=2$-ben (nem teljesül a szükséges feltétel) 2

b.)

$\boxed{11}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\frac{x-3}{2-x}\right)^2} \cdot \dfrac{1\cdot(2-x) - (x-3)(-1)}{(2-x)^2}, & \text{ha } x < 2 \quad 4 \\ \underbrace{\left(e^{\frac{1}{x}\ln(4+3x^2)}\right)'}_{2} = (4+3x^2)^{1/x} \cdot \underbrace{\left(\dfrac{\ln(4+3x^2)}{x}\right)'}_{\frac{\frac{6x}{4+3x^2}\cdot x - \ln(4+3x^2)\cdot 1}{x^2}}, & \text{ha } x > 2 \quad 2 \end{cases}$$

3

an1zh2 071121/3.
α

5. feladat (18 pont)

a) Legyen f differenciálható az I intervallumon! Igaz-e, vagy hamis-e az alábbi állítás? A hamisra mutasson ellenpéldát!

a1) f szigorúan monoton nő I-n $\Longrightarrow$ $f'(x) > 0$ I-n

a2) f szigorúan monoton nő I-n $\Longleftarrow$ $f'(x) > 0$ I-n

b) Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken az

$$f(x) = \frac{(x+3)^3}{x-1}$$

szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!

Van-e lokális szélsőértéke a függvénynek? Ha igen, milyen jellegű?

a.) $\boxed{4}$

a1) hamis Pl. $f(x)=x^3$ szig. mon. nő, de $f'(x)>0$ nem teljesül ($f'(x)\geq 0$ igaz) 3

a2) igaz 1

b.) $\boxed{14}$

$$f'(x) = \frac{3(x+3)^2(x-1)-(x+3)^3\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{(x+3)^2\,(2x-6)}{(x-1)^2}$$ 3

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$-$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	↘		↘	szak. h.	↘	lok. min.	↗

3 3

$(-\infty, 1)$-en 1 és $(1,3)$-on 1 szigorúan monoton csökken, $(3,\infty)$-en 1 szigorúan monoton nő a függvény

$x=3$-ban lokális minimuma van, mert csökkenőből növekvőbe megy át. 2

© an1zh2071121/4.

6. feladat (19 pont)

Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(4x^2)}{\mathrm{sh}(5x^2)} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{5x}-1}{3x^2} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 \ln x^5 = ?$

a.) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(4x^2)}{sh(5x^2)} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-(4x^2)^2}} \cdot 8x}{ch\,5x^2 \cdot 10x} = \dfrac{4}{5}$

$\dfrac{8x}{10x} = \dfrac{4}{5}$

b.) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{5x}-1}{3x^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5e^{5x}}{6x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{25e^{5x}}{6} = \infty$

c.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to +0} \underset{0\cdot(-\infty)}{x^2 \ln x^5} = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x^5}{\frac{1}{x^2}} \underset{\frac{-\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\frac{1}{x^5} 5x^4}{\frac{-2}{x^3}} =$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$= \lim\limits_{x\to +0} -\frac{5}{2} x^2 = 0$

(Praktikusabban: $(\ln x^5)' = (5\ln x)' = 5\cdot\frac{1}{x}$)

Pótfeladat (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (12 pont)

$$f(x) = \ln(3x^2+2)$$

Adja meg a monotonitási intervallumokat!
Hol konvex, hol konkáv a függvény?

$f'(x) = \dfrac{6x}{3x^2+2}$ $x \in \mathbb{R}$ 2

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

3

$f''(x) = \dfrac{6\cdot(3x^2+2) - 6x\cdot 6x}{(3x^2+2)^2} = \dfrac{6(2-3x^2)}{(3x^2+2)^2} = 0$ $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

3

α an1zh2 071121/5.

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$		$\smile$		$\frown$

4

8. feladat (8 pont)

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x^2+4)\ \sqrt{x^2-2x+1}}$$

Adja meg a függvény értelmezési tartományát!

Hol és milyen szakadása van a függvénynek? (A megfelelő határértékek kiszámítása után válaszoljon!)

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x^2+4)\sqrt{(x-1)^2}} = \frac{x-1}{|x-1|}\,\frac{x+3}{\underbrace{x^2+4}_{\geq 4}}, \quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

2 1

Szakadási hely: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \underbrace{\frac{x-1}{x-1}}_{=1}\,\frac{x+3}{x^2+4} = \frac{4}{5}$$ 2

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \underbrace{\frac{x-1}{-(x-1)}}_{=-1}\,\frac{x+3}{x^2+4} = -\frac{4}{5}$$ 2

$x = 1$-ben véges ugrás van (elsőfajú szakadás)

1