ANALÍZIS(1) Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2012. január 5. Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (7+4=11 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+3n+2}\right)=?$ *b)* $\lim_{n\to\infty}\frac{n^8+2n^5+3n^2}{(n^2+5)^4}=?$

a.) $\boxed{7}$

$$a_n=\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+3n+2}\right)\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+3n+2}}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+3n+2}} \quad (2)$$

$$=\frac{-n-2}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+3n+2}} \quad (1) \quad =\underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2}}}_{=\frac{n}{n}=1}\frac{-1-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\frac{-1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0+0}}=-\frac{1}{2} \quad (4)$$

b.) $\boxed{4}$

$$b_n=\underbrace{\frac{n^8}{(n^2)^4}}_{=1}\frac{1+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^6}}{(1+\frac{5}{n^2})^4}\longrightarrow\frac{1+0+0}{(1+0)^4}=1$$

2. feladat (7+6=13 pont)

a) Mondja ki és bizonyítsa be a sorokra tanult majoráns kritériumot!

b) Konvergens-e a következő sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}+2^{4n+2}}{6^{2n+1}+4}$$

a.) $\boxed{7}$

(T) $\boxed{\textit{Ha } 0<a_n\le c_n \quad \forall\ n\textit{-re és } \sum_{n=1}^{\infty}c_n \textit{ konvergens } \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n \textit{ konvergens}}$ (2)

(B) A feltétel miatt

$$\begin{aligned} a_1 &\le c_1\\ &\vdots\\ a_n &\le c_n\end{aligned}$$

Azonos értelmű egyenlőtlenségek összeadhatók, ezért

$$s_n^a=a_1+\cdots+a_n\le c_1+\cdots+c_n=s_n^c\,.$$

Továbbá $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ konvergenciája miatt $s_n^c\le K \implies s_n^a$ korlátos és mivel pozitív tagú a sor $\implies \sum_{1}^{\infty}a_n$ konvergens. (5) ■

an1v-120105/1.

b.) $\boxed{6}$ $a_n = \dfrac{27^n + 4\cdot 16^n}{6\cdot 36^n + 4} \leq \dfrac{27^n + 4\cdot 27^n}{6\cdot 36^n + 0} = \dfrac{5}{6}\left(\dfrac{27}{36}\right)^n = \dfrac{5}{6}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ (1) (3)

$\frac{5}{6}\sum^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ konv. geom. sor $\left(q=\frac{3}{4},\ |q|<1\right)$ (1)

$\xrightarrow[\text{majoráns. kr.}]{}$ $\sum^{\infty} a_n$ konv. (1)

3. feladat (3+7+4=14 pont)

a) Mondja ki a függvények és sorozatok határértékére vonatkozó átviteli elvet!

b) Igazolja, hogy az $f(x) = \sin(x)$ függvénynek nem létezik a határértéke a ∞-ben!

c)

$$g(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Folytonos-e a fenti $g(x)$ függvény az $x = 0$-ban? (Állítását igazolja!)

a.) $\boxed{3}$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall x_n \to x_0$-ra $f(x_n)\to A$

$x_n \in D_f$

$x_n \neq x_0$

b.) $\boxed{7}$ $x_n^{(1)} = n\pi \to \infty$: $f(x_n^{(1)}) = \sin n\pi = 0 \to 0$

$x_n^{(2)} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to \infty$: $f(x_n^{(2)}) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1 \to 1 \neq 0$

$\xrightarrow[\text{átv. elv}]{}$ $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \sin x$

c.) $\boxed{4}$ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \underset{\downarrow \atop 0}{x}\ \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{korlátos}} = 0 = g(0)$, tehát g folytonos $x=0$-ban.

4. feladat (8+4+10=22 pont)

a) Adjon szükséges feltételt differenciálható függvénynél lokális szélsőérték létezésére! Mondja ki és bizonyítsa be a tanult tételt!

b) Adjon elégséges feltételt a lokális szélsőérték létezésére! A tanult tételt kell kimondania (két állítás).

c)

$$f(x) = (x-1)\ e^{-x^2+x}$$

Határozza meg f lokális szélsőérték helyeit és azok jellegét, valamint azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, ahol f monoton nő illetve csökken!

a) Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele: $f'(x_0)=0$

$\boxed{8}$ (T) Ha f az x_0 helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0)=0$. $(K_{x_0,\delta} \subset D_f)$ (2)

(B) Pl. lokális maximumra (4.19.a ábra):

$$\lim_{h\to 0-} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\frac{-}{-}} = \underbrace{f'_-(x_0) = f'(x_0)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \geq 0$$

$$\lim_{h\to 0+} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\frac{-}{+}} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \leq 0$$

■ (6)

$\Longrightarrow \quad f'(x_0)=0 \quad$ (vízszintes érintő)

(A $\frac{-}{-}$, illetve a $\frac{-}{+}$ szimbólumokban a + és − jel a tört számlálójának és nevezőjének előjelére utal.)

b.) $\boxed{4}$

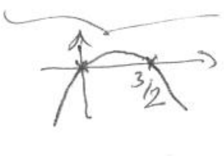
(T) $K(x_0,\delta) \subset D_f$ *(belső pont);* $\quad K(x_0,\delta) \subset D_{f'}$
Differenciálható függvény esetén lokális szélsőérték létezésének

1. *szükséges feltétele:* $f'(x_0)=0$
2. *elégséges feltétele:*
   a) $f'(x_0)=0$ *és* f' *előjelet vált* x_0*-ban (tehát* f' *lokálisan csökken vagy lokálisan nő* x_0*-ban)*
   b) *Ha* f *kétszer differenciálható* x_0*-ban:* $f'(x_0)=0$ *és* $f''(x_0)\neq 0$
   $(f''(x_0)>0$: *lok. min.;* $f''(x_0)<0$: *lok. max.)*

c.) $\boxed{10}$

$$f'(x) = e^{-x^2+x} + (x-1)e^{-x^2+x}(-2x+1) = \quad (2)$$

$$= \underbrace{e^{-x^2+x}}_{>0}\, x(-2x+3) \quad (2) \text{ (az átalakításért)}$$



x:	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	lok. min.	↗	lok max	↘

(6)

an1v-12010513.

5. feladat (13 pont)*

$$\int \frac{e^{2x}+7e^x}{e^{2x}-e^x-2}\,dx = ?$$

Használjuk a $t = e^x$ helyettesítést!

$t = e^x \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$ (2)

$$\int \frac{t^2+7t}{t^2-t-2}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t+7}{t^2-t-2}\,dt = \int \frac{t+7}{(t+1)(t-2)}\,dt$$
(2) (1)

$$\frac{t+7}{(t+1)(t-2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-2}$$ (1)

$t+7 = A(t-2) + B(t+1)$

$t=-1:\ 6=-3A \Rightarrow A=-2$

$t=2:\ 9=3B \Rightarrow B=3$ (3)

$$\int\left(-2\,\frac{1}{t+1} + 3\,\frac{1}{t-2}\right)dt = -2\ln|t+1| + 3\ln|t-2| + C$$ (3)

$$I = -2\ln(e^x+1) + 3\ln|e^x-2| + C$$ (1)

6. feladat (7+7=14 pont)*

$$a)\ \int_0^2 \frac{x}{4+9x^2}\,dx = ? \qquad b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+9x^2}\,dx = ?$$

a.) $\boxed{7}$ $\frac{1}{18}\int_0^2 \frac{18x}{4+9x^2}\,dx = \frac{1}{18}\ln(4+9x^2)\Big|_0^2 = \frac{1}{18}(\ln 40 - \ln 4)$

f'/f

b.) $\boxed{7}$ $I_b = \lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to\infty}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{4+9x^2}\,dx = \lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to\infty}} \frac{1}{4}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx =$ (1)

$= \lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to\infty}} \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\omega_1}^{\omega_2} = \frac{1}{6}\lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\omega_2 - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\omega_1\right) =$
(4) (1)

$= \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$
(1)

anlv-120105/4.

7. feladat (8+5=13 pont)*

Legyen

$$F(x) = \int_{t=0}^{x} \sqrt{4+t^4}\, dt\,, \qquad H(x) = \int_{t=x}^{x^2} \sqrt{4+t^4}\, dt\,.$$

a) Határozza meg $F(x)$ és $H(x)$ deriváltját!

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{\operatorname{arctg}(5x)} = ?$$

a.) $\boxed{8}$ $F(x) = \int_0^x \underbrace{\sqrt{4+t^4}}_{\text{folyt.}}\, dt \xRightarrow[\text{II. alaptétele}]{\text{int. szám.}} F'(x) = \sqrt{4+x^4}$ (3)

$H(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{4+t^4}\, dt = \int_0^{x^2} \sqrt{4+t^4}\, dt - \int_0^x \sqrt{4+t^4}\, dt =$

$= F(x^2) - F(x)$

$\Rightarrow H'(x) = F'(x^2)\cdot 2x - F'(x) = \sqrt{4+x^8}\cdot 2x - \sqrt{4+x^4}$ (5)

b.) $\boxed{5}$ $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sqrt{4+t^4}\, dt}{\operatorname{arctg} 5x} \overset{L'H\ (1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x^4}}{\frac{1}{1+(5x)^2}\cdot 5} = \frac{2}{5}$ (3)

$\frac{0}{0}$ (1)

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (9 pont)

Határozza meg, hogy hol konvex illetve hol konkáv az $f(x) = x\,e^{-2x}$ függvény!

$f'(x) = 1\cdot e^{-2x} + x\cdot e^{-2x}(-2) = e^{-2x} - 2x e^{-2x}$ (2)

$f''(x) = -2e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2xe^{-2x}(-2) = 4\underbrace{e^{-2x}}_{>0}(x-1)$ (2)

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\smile$

(5)

an1o-12010515.

9. feladat (6+5=11 pont)

a) $(x^x)' = ?$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{8n^2} = ?$

a.) $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ $\quad x>0$ $\quad$ 2

$\boxed{6}$

$f'(x) = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' =$

$= x^x \left(1 \cdot \ln x + \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1}\right)$ $\quad$ 4

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1+\frac{-3}{2n^2}\right)^{2n^2}} \right)^4 = \left(\dfrac{e}{e^{-3}}\right)^4 = (e^4)^4 = e^{16}$

$\boxed{5}$

an1o-12010516.