Villamosmérnök A3 (2017 ősz) — 1. pót ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $y' = (x+y)/x$ differenciálegyenletet!

Megoldás. Lineáris: $y' - y/x = 1$. y_{ha}: $y' = y/x$ szétválasztható, $y \equiv 0$ szinguláris megoldás. $\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx \rightsquigarrow \ln|y| = \ln|x| + c \rightsquigarrow |y| = |x|c_1$ $(c_1 > 0)$, amiből Bolzano-tétel miatt $y_{ha} = cx$. y_{ip} állandók variálásával: $y_{ip} = c(x)x \rightsquigarrow 1 = c'(x)x + c(x) - c(x) = c'(x)x \rightsquigarrow$ $c(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| \rightsquigarrow y_{ip} = x\ln|x|$, amiből $y_{ia} = x(c + \ln|x|)$.

VAGY: Homogén fokszámú, szétválaszthatóra visszavezethető: $y' = f(y/x)$, ahol $f(u) = 1+u$. Legyen $u = y/x$; akkor $u' = \frac{1}{x}1 + u - u = \frac{1}{x}$, tehát $u = \ln|x| + c$, amiből $y = x(\ln|x| + c)$.

2. Oldja meg az $y' + 2xy = x$ differenciálegyenletet!

Megoldás. $y' = x(1-2y)$ szétválasztható változójú, $y \equiv 1/2$ szinguláris megoldás. $\int \frac{1}{1-2y}\, dy = \int x\, dx \rightsquigarrow -\frac{1}{2}\ln|1-2y| = \frac{1}{2}x^2 + c \rightsquigarrow \ln|1-2y| = -x^2 + c \rightsquigarrow |1-2y| = c_1 e^{-x^2}$ $(c_1 > 0)$, Bolzano-tétel miatt tehát $1 - 2y = ce^{-x^2}$, azaz $y = \frac{1-ce^{-x^2}}{2}$ $(c \neq 0)$.

3. Oldja meg az $y'' + 3y' + 2y = \sin t$ differenciálegyenletet!

Megoldás. y_{ha}: a karakterisztikus egyenlet gyökei -1 és -2, ezért $y_{ha} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$. y_{ip}: $\sin t = e^{0t}(0 \cdot \cos 1t + 1 \cdot \sin 1t)$, $0 + j$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek és 0, 1 nulladfokú polinomok, ezért y_{ip}-t $P\cos t + Q\sin t$, $P, Q \in \mathbb{R}$ alakban keressük. De akkor $y'_{ip} = -P\sin t + Q\cos t$, $y''_{ip} = -y_{ip}$; visszahelyettesítve így $\sin t = y_{ip} + 3y'_{ip} = (P+3Q)\cos t + (Q-3P)\sin t$-t, azaz $P = -3/10$, $Q = 1/10$-et kapjuk, vagyis $y_{ip} = \frac{1}{10}(\sin t - 3\cos t)$.

Az általános megoldás tehát $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{10}(\sin t - 3\cos t)$.

4. Oldja meg az $\begin{cases} y_1' + y_2 &= t \\ y_2' + y_1 &= e^t \end{cases}$ differenciálegyenletrendszert!

Megoldás. (1) Homogén általános megoldása. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sajátértékei és a hozzájuk tartozó sajátvektorok: $\lambda = 1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $\lambda = -1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tehát $\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & e^{-t} \end{pmatrix}$ oszlopai alaprendszer, azaz a homogén általános megoldása $\mathbf{\Psi c}$.

(2) Inhomogén partikuláris megoldása. $\mathbf{\Psi c}' = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$ egyenletrendszer kibővített mátrixa: $\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} & t \\ -e^t & e^{-t} & e^t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}(te^{-t} - 1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(te^t + e^{2t}) \end{pmatrix}$; megoldása: $c_1'(t) = \frac{1}{2}(te^{-t} - 1)$, $c_2' = \frac{1}{2}(te^t + e^{2t})$, amiből $c_1(t) = -\frac{1}{2}(t + (t+1)e^{-t})$, $c_2(t) = \frac{e^t}{2}(t - 1 + \frac{e^t}{2})$, tehát $y_{ip1} = \frac{e^t}{2}(\frac{1}{2} - t) - 1$, $y_{ip2} = \frac{e^t}{2}(\frac{1}{2} + t) + t$, következésképp $y_{ia1} = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{e^t}{2}(\frac{1}{2} - t) - 1$, $y_{ia2} = -c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{e^t}{2}(\frac{1}{2} + t) + t$.

5. Oldja meg a $\begin{cases} y_1' + y_2 &= \sin t \\ y_2' + y_1 &= \cos t \end{cases}$, $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$ kezdetiérték-problémát Laplace-transzformáció segítségével!

Megoldás. Az egyenletrendszert Laplace-transzformálva, a kezdetiértékeket is figyelembe véve $\begin{cases} sY_1 + Y_2 &= \frac{1}{s^2+1} + 2 \\ Y_1 + sY_2 &= \frac{s}{s^2+1} \end{cases}$, amiből $Y_1 = \frac{2s}{s^2-1}$ és $Y_2 = \frac{1}{s^2+1} - \frac{2}{s^2-1}$. Visszatranszformálva: $y_1 = 2\operatorname{ch} t$, $y_2 = \sin t - 2\operatorname{sh} t$.

IMSc-feladat. Mutassa meg, hogy minden $a > 0$-ra $\mathfrak{L}\{g(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathfrak{L}\{g(t)\}(\frac{s}{a})$, ahol $\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)$ jelöli az f függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldás. Helyettesítéses integrálás: minden $b \geq 0$-ra $\int_0^b g(at)e^{-st}\,dt = \int_0^{ab} g(a\frac{t}{a})e^{-s\frac{t}{a}}\frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^{ab} g(t)e^{-\frac{s}{a}t}\,dt$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left\{g(at)\right\}(s) = \int_0^\infty g(at)e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b g(at)e^{-st}\,dt \\ = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{a}\int_0^{ab} g(t)e^{-\frac{s}{a}t}\,dt\frac{1}{a}\int_0^\infty g(t)e^{-\frac{s}{a}t}\,dt = \frac{1}{a}\mathfrak{L}\left\{g(t)\right\}\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$