Aláíráspótló vizsga

A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. Amennyiben egy feladat máshogy nem rendelkezik, a számszerű végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsük, vagy normál tört alakban adjuk meg. Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. Két szabályos dobókockával dobunk. Jelölje S_i azt az eseményt, hogy a dobott számok összege *legalább* i ($i = 2, 3, \dots, 12$). Legyen továbbá MAX_j az az esemény, hogy a dobott számok maximumának értéke j ($j = 1, 2 \dots, 6$). Fejezzük ki a fenti események és a halmazműveletek segítségével az alábbi eseményeket. **A kifejezések helyességének indoklása is szükséges.**

$$A = \{\text{a dobott számok összege 7}\}, \qquad B = \{\text{két darab 2-est dobunk}\},$$

$$C = \{\text{a dobott számok mindegyike 1-es vagy 6-os}\}.$$

(A C eseménybe azon eseteket is beleértjük, mikor nem fordul elő mindkét szám.)

2. Megkeverünk egy pakli magyar kártyát, majd egymás után visszatevés nélkül kihúzunk belőle 4 lapot.

   a) Mi a valószínűsége, hogy pontosan egy ászt húzunk?

   b) Mi a valószínűsége, hogy pontosan két ászt húzunk?

   c) Mi a valószínűsége, hogy legalább egy ászt húzunk?

   (Egy pakli magyar kártya 32 különböző lapból áll, és 4 darab ászt tartalmaz.)

3. Az A, B és C események mindegyike $\frac{1}{3}$ valószínűséggel következik be, továbbá az A és B, valamint a B és C események egymást kizáróak. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(A \cap C)$ valószínűséget, ha tudjuk, hogy $\frac{1}{9}$ annak a valószínűsége, hogy az A, B és C események egyike sem következik be. Függetlenek-e az A és C események?

4. Egy városban ugyanannyi férfi van, mint nő, és ott minden 100 férfi közül 5, ill. minden 10 000 nő közül 25 színvak. Mennyi a valószínűsége, hogy a színvakokról vezetett nyilvántartásból egy találomra választott karton egy férfi adatait tartalmazza?

5. Egy falusi búcsúban az egyik sátorban célbalövéssel lehet plüssjátékokat nyerni. Egy 1 m átmérőjű kör alakú céltáblára kell lőni légpuskával, nyereményt pedig akkor lehet választani, ha valaki beletalál a tábla középpontja körüli 10 cm sugarú körbe. Gréta nagyon szeretne egy plüss pingvint, ezért elhatározza, hogy addig próbálkozik, amíg el nem találja a középső kis kört (utóbbi esetben persze egy tetszőleges játékot választhat magának). Egy próbálkozásért 200 forintot kell fizetnie (és mindig csak a soron következő 1 db próbálkozásért fizet). Viszont a légpuska nem éppen optimális beállításainak, valamit Gréta lövészetben való járatlanságának köszönhetően feltehető, hogy lövései egymástól függetlenül, egyenletesen véletlenszerűen oszlanak el az egész céltáblán (Gréta elszántságából adódóan azért azt is feltehetjük, hogy minden lövés eltalálja a céltáblát). Mennyi Gréta próbálkozásai számának a várható értéke? Mi a valószínűsége annak, hogy Gréta több mint 1000 forintot költ el a céllövöldében?

6. Az X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\sqrt{t}}, & \text{ha } t \in (0;1), \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

   ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ egy paraméter. Határozzuk meg α értékét, valamint az X eloszlásfüggvényét ill. várható értékét.

Nevezetes eloszlások táblázata

Eloszlás neve	Jelölés	ran$X$	$\mathbb{P}(X = k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$1 - p$, p	-	p
binomiális	$B(n; p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	-	np
geometriai	$Geo(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1 - p)^{k-1} p$	-	$\frac{1}{p}$
egyenletes	$U(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$