1. Villamosmérnök szigorlat - MEGOLDÁSOK

1. (**20 pont**)
   Végezzen teljes függvényvizsgálatot az
   $$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$
   függvényen és vázolja fel a függvényt!
   Megoldás:

   - $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$ (következésképpen nem lehet sem páros, sem páratlan, sem periodikus) $\boxed{\text{2 pont}}$
   - zérushely:
   $$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Longleftrightarrow x = 1 \qquad \boxed{\text{1 pont}}$$
   -
   $$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \qquad \boxed{\text{2 pont}}$$
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \quad \text{(l'Hospital-szabály)} \qquad \boxed{\text{2 pont}}$$
   - monotonitás vizsgálata
   $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}. \qquad \boxed{\text{2 pont}}$$
   $$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Longleftrightarrow x = e$$
   $$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x < 1 \quad \Longleftrightarrow x < e$$
   Ezek alapján táblázatba foglalva:

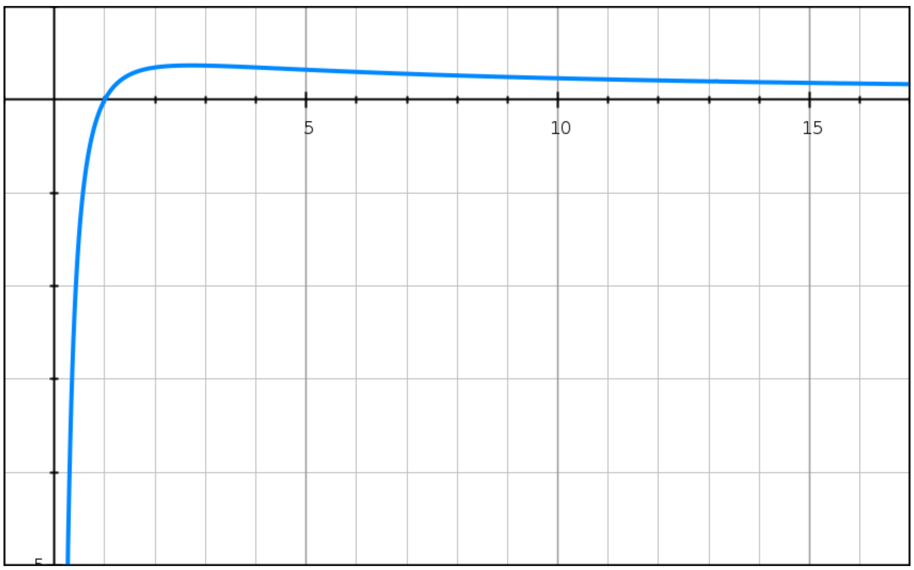
x	$(0, e)$	e	(e, ∞)
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	MAX$=\frac{1}{e}$	$\searrow$

   $\boxed{\text{3 pont}}$
   - konvexitás vizsgálata
   $$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3} \qquad \boxed{\text{2 pont}}$$
   $$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\ln x = 3 \quad \Longleftrightarrow x = e^{3/2}$$
   $$f''(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\ln x > 3 \quad \Longleftrightarrow x > e^{3/2}$$
   Ezek alapján táblázatba foglalva:

x	$(0, e^{3/2})$	$e^{3/2}$	$(e^{3/2}, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	INFL.$= \frac{3}{2}e^{-3/2}$	$\cup$

$\boxed{\text{3 pont}}$

- Ábrázolás $\boxed{\text{3 pont}}$



Az $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ függvény gráfja.

2. (**15+15 pont pont**)

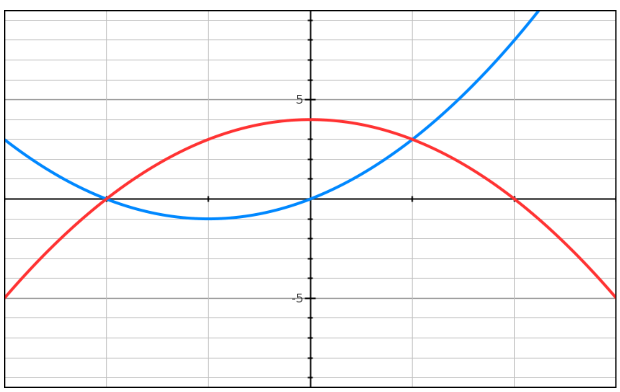
(a) Határozza meg az $y = x^2 + 2x$ és az $y = 4 - x^2$ parabolák által határolt korlátos síktartomány területét!

Megoldás:

Mivel $y = x^2 + 2x = x(x+2)$ és $y = 4 - x^2 = (2-x)(2+x)$, a parabolák zérushelyei $-2, 0$ illetve $-2, 2$. A parabolák metszéspontja az $x^2 + 2x = 4 - x^2$ egyenletből, annak rendezése után:

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2, \text{ illetve } x = 1. \quad \boxed{5 \text{ pont}}$$

A kiszámítandó terület a két parabola közé zárt korlátos tartomány területe:



A közrezárt terület:

$$T \underset{\boxed{5 \text{ pont}}}{\underset{\uparrow}{=}} \int_{-2}^{1} (4 - x^2 - (x^2 + 2x))\, \mathrm{d}\, x = \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4)\, \mathrm{d}\, x \underset{\boxed{3 \text{ pont}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} - x^2 + 4x \right]_{-2}^{1} \underset{\boxed{2 \text{ pont}}}{\underset{\uparrow}{=}} 9.$$

(b) Határozza meg az

$$I=\int_0^1\int_{y^2}^1 ye^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

kettős integrál értékét!

Megoldás:

Az integrálást ebben a sorrendben nem tudjuk elvégezni, ezért meg kell cserélni az integrálás sorrendjét. Az integrálási tartomány:

$$T: y^2\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1,$$

melyet átírva:

$$T: 0\le y\le\sqrt{x},\quad 0\le x\le 1.\quad \boxed{5\text{ pont}}$$

Ezzel:

$$I=\int_0^1 \underbrace{\int_0^{\sqrt{x}} ye^{-x^2}\,\mathrm{d}\,y}_{\left[\frac{y^2}{2}e^{-x^2}\right]_{y=0}^{\sqrt{x}}=\frac{x}{2}e^{-x^2}}\,\mathrm{d}\,x \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{4\text{ pont}}}}{=} -\frac{1}{4}\int_0^1(-2x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{4\text{ pont}}}}{=}$$

$$=-\frac{1}{4}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{2\text{ pont}}}}{=} \frac{1-e^{-1}}{4}.$$

3. (**20 pont**)

Adja meg az alábbi egyenletrendszer megoldásait az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ valós paraméterek függvényében!

$$\begin{aligned} x+y &= 3\\ y+\mathbf{a}\,z &= 2\\ y+z &= \mathbf{b}\,. \end{aligned}$$

Megoldás:

Végezzünk Gauss-eliminációt az egyenletrendszer kibővített mátrixán!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & \mathbf{a} & 2\\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{b}\end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ S_3-S_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & \mathbf{a} & 2\\ 0 & 0 & 1-\mathbf{a} & \mathbf{b}-2\end{array}\right) \quad \boxed{2\text{ pont}}$$

Az utolsó

$$(1-\mathbf{a})z=\mathbf{b}-2$$

egyenletet vizsgálva, a következő esetekkel van dolgunk:

- Ha $\mathbf{a} = 1$ és $\mathbf{b} \neq 2$, akkor ellentmondásra jutunk, azaz ekkor **nincs megoldás**. $\boxed{\text{4 pont}}$
- Ha $\mathbf{a} = 1$ és $\mathbf{b} = 2$, akkor az utolsó tiszta zérus sor törlése után a kibővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

  melynek rangja 2, így ekkor **végtelen sok megoldásunk van** $3-2=1$ szabad paraméterrel. $\boxed{\text{4 pont}}$
  Ezek például $z = p \in \mathbb{R}$ paraméterrel kifejezve:

$$x = 1 + p, \quad y = 2 - p, \quad z = p \quad \boxed{\text{3 pont}}.$$

- Ha $\mathbf{a} \neq 1$, akkor **pontosan egy megoldásunk** van $\boxed{\text{4 pont}}$, melyek

$$z = \frac{\mathbf{b} - 2}{1 - \mathbf{a}}, \quad y = 2 - \mathbf{a}\frac{\mathbf{b} - 2}{1 - \mathbf{a}}, \quad x = 1 + \mathbf{a}\frac{\mathbf{b} - 2}{1 - \mathbf{a}} \quad \boxed{\text{3 pont}}.$$

4. (**10 pont**)
Oldja meg a

$$z^5 + z = 0$$

egyenletet a komplex számok körében!

Megoldás:

$$z^5 + z = z(z^4 + 1) = 0.$$

Innen az első gyök $z = 0$ $\boxed{\text{1 pont}}$.
A további gyökökhöz a

$$z^4 = -1 = e^{i\pi}$$

egyenletet kell megoldani, vagyis a -1 negyedik gyökeit kell megtalálni, azaz

$$z_k = e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{4}}, \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

A gyökök tehát

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \boxed{\text{2 pont}}$$

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \boxed{\text{2 pont}}$$

$$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \boxed{\text{2 pont}}$$

$$z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \boxed{\text{2 pont}}.$$

5. (**20 pont**)
Határozza meg az $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ függvény szélsőértékeit! Irja fel a $P(2,1)$ pontban a $\mathbf{v} = (-1,3)$ irányban vett iránymenti derivált értékét, amennyiben létezik!

Megoldás:
A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \quad \Longrightarrow y = x^2 \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

$$f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 0 \quad \Longrightarrow x = y^2 \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

Összevetve a két feltételt: $y = y^4$, azaz $y = 0$ vagy $y = 1$ következik. Szélsőértékünk tehát a

$$P_1(0,0), \quad \text{illetve a} \quad P_2(1,1) \quad \boxed{2 \text{ pont}}$$

lehet.
A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = 6x, \quad f''_{xy} = f''_{yx}(x,y) = -3, \quad f''_{yy}(x,y) = 6y \quad \boxed{4 \text{ pont}}$$

ahonnan a Hesse-determináns:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9 \quad \boxed{2 \text{ pont}}$$

- Mivel $H(0,0)7 - 9 < 0$, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértékünk. $\boxed{2 \text{ pont}}$
- Mivel $H(1,1) = 27 > 0$ és $f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$, ezért P_2-ben minimumum van. $\boxed{2 \text{ pont}}$

Miután a függvény parciális deriváltjai mindenütt folytonosak, ezért a függvény mindenütt deriválható, a derivált pedig

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x), \quad \text{speciálisan} \quad \operatorname{grad} f(2,1) = (9,-3). \quad \boxed{3 \text{ pont}}$$

Mivel $|\,\mathbf{v}\,| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, ezért $P(2,1)$-ben az iránymenti derivált értéke a $\mathbf{v}$ irányban:

$$f'_{\mathbf{v}}(2,1) = \langle \frac{\mathbf{v}}{|\,\mathbf{v}\,|}, \operatorname{grad} f(2,1) \rangle = -\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 9 + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot (-3) = -\frac{18}{\sqrt{10}}. \quad \boxed{3 \text{ pont}}$$