2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1999/2000 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Bizonyítsa be, hogy bármely A, B és C halmazokra $A \cap \overline{B} \subseteq C$ – ből következik, hogy $\overline{C} \subseteq \overline{A} \cup B$.

MO. $A \subseteq B$ iff $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ és de Morgan. VAGY közvetlenül: $x \in \overline{C} \rightsquigarrow x \notin C \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow x \notin A \cap \overline{B} \rightsquigarrow x \notin A$ vagy $x \notin \overline{B} \rightsquigarrow x \in \overline{A}$ vagy $x \in B \rightsquigarrow x \in \overline{A} \cup B$.

---

2. Legyen (a_n) pozitív tagú számsorozat. Igaz–e, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor (a_n) konvergens? Igaz–e ennek az állításnak a megfordítása?

MO. Nem, pl. ha $a_n = n^r$ bármely racionális $r > 0$ – ra, mert ekkor $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^r}{n^r} = (1 + \frac{1}{n})^r \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, de persze $r > 0$ esetén $a_n = n^r \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, azaz a_n nem konvergens. A megfordítás sem igaz, pl. ha $a_n = q^n$, ahol $0 < q < 1$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 1$, VAGY ha $a_n = \frac{1}{n^n}$, akkor is

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ és } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \longrightarrow \frac{1}{e} \neq 1 .$$

---

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xe^{-x} + 2x^2e^{-2x}}{3xe^{-x} + 4x^2e^{-2x}} = ?$

MO. $\frac{xe^{-x} + 2x^2e^{-2x}}{3xe^{-x} + 4x^2e^{-2x}} = \frac{1 + 2xe^{-x}}{3 + 4xe^{-x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{3}$ mert $xe^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

---

4. Melyik igaz, melyik nem:

a) Ha f folytonos $[a,b]$ – n, akkor f korlátos $[a,b]$ – n

b) Ha f korlátos $[a,b]$ – n, akkor véges sok pont kivételével f folytonos $[a,b]$ – n

c) Ha f folytonos (a,b) – n, akkor véges sok pont kivételével f deriválható (a,b) – n

d) Ha f deriválható (a,b) – n, akkor f folytonos (a,b) – n

MO.

a) Igen: Weierstrass

b) Nem: $[0,1]$ – en Dirichlet VAGY $f(x) = 0$ ha $x = \frac{1}{n}$ valamely $n \in \mathbb{N}$ – re és $f(x) = 1$ egyébként

c) Nem: $f(x) = |\sin \frac{1}{x}|$ (0,1)–en folytonos mert itt értelmezett elemi függvény abszolút értéke, de az $x_n = \frac{1}{n\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$ pontokban nyilván jobb– és baloldali deriváltjai nem egyenlőek, VAGY persze pl. egy olyan 1 magas egyenlőszárú háromszögekből álló végtelen sorozat, amelynél a háromszögek alapjai rendre az $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ $(n \in \mathbb{N})$ intervallumok

d) Igen: $f(x+h) - f(x) = h\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow[h\to o]{} 0 \cdot f'(x) = 0$

---

5. Legyen $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$ ha $x \neq 0$ és $f(0) = 0$. Hol deriválható az f függvény? $f'(x) = ?$

MO. Mindenütt, mert

a) az origón kívül itt értelmezett elemi függvény

b) az origóban: $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h \operatorname{arctg} \frac{1}{h^2} - 0}{h} = \operatorname{arctg} \frac{1}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{\pi}{2}$, így

$$f'(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} + x\,\frac{1}{1 + \frac{1}{x^4}} \cdot (-2\frac{1}{x^3}) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^2} \quad \text{ha } x \neq 0 \text{ és } f'(0) = \frac{\pi}{2} .$$

---

6. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = ?$

MO. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$