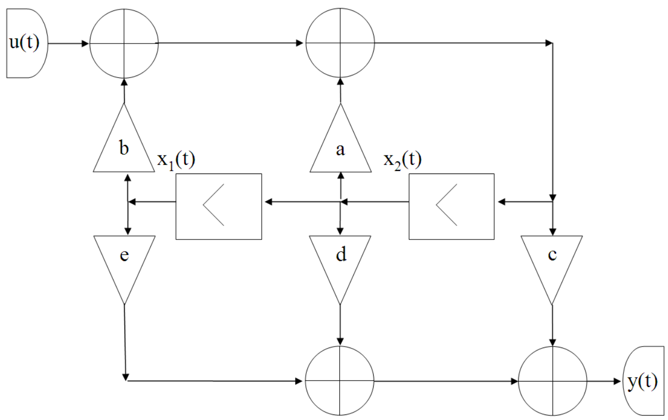
Jelek és rendszerek (VIHVA214)

2. zárthelyi **B** *csoport*

2011.12.07.

	Név (olvashatóan)	
	Aláírás	Neptun kód
	Pontszám	Javító
1.Nagypélda		
2.Nagypélda		
Kispélda		
Összesen		

1. Nagypélda (Megoldását külön lapra kérjük!)
A folytonos idejű rendszer az alábbi jelfolyam-hálózattal adott.



(a) Adja meg a rendszer $H(j\omega)$átviteli karakterisztikáját normálalakban $a=-1{,}2$; $b=0{,}35$; $c=0$; $d=0{,}5$; $e=2$ paraméter értékek mellett! Állapotegyenletek használata esetén az állapotváltozókat a késleltetők sorszámának megfelelően vegye fel! /3 pont/

Bizonyos paraméterértékek mellett a rendszer átviteli függvénye $H(s)=\dfrac{0{,}3s}{s^2+1{,}2s+0{,}35}$.

A további részfeladatok számításakor ezt használja!

(b) Vizsgálja meg a rendszer stabilitását és vázolja a pólus-zérus elrendezést! /3 pont/

(c) Adja meg a rendszer $h(t)$impulzusválaszát! /5 pont/

(d) A gerjesztés $u(t)=\varepsilon(t-2)$. Adja meg a rendszer válaszának időfüggvényét! /9 pont/

Megoldás:

(a)

Tekintsük a felső (az X_1-el jelölt) késleltető bementét jωX_1-nek, ekkor az alsó (X_2-vel jelölt) késleltető bemenete: jωX_2 a kimenete jωX_1. Ekkor a jelfolyam-hálózatra felírható egyenletek:

$$j\omega X_1 = X_2$$

$$j\omega X_2 = bX_1 + aX_2 + U \quad \rightarrow \quad (j\omega)^2 X_1 = bX_1 + aj\omega X_1 + U$$ **/1 pont** (egyenletek)

$$X_1 = \frac{U}{(j\omega)^2 - aj\omega - b}$$

$$Y = eX_1 + cj\omega X_2 + dX_2 = eX_1 + c(j\omega)^2 X_1 + dj\omega X_1 = X_1\left(c(j\omega)^2 + dj\omega + e\right)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{c\cdot(j\omega)^2 + d\cdot j\omega + e}{(j\omega)^2 - a\cdot j\omega - b}$$ **/1 pont** (átv. karak.)

Behelyettesítés után:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{0{,}5j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 1{,}2j\omega - 0{,}35}$$ **/1 pont**

(b)

$$H(s)=\frac{0{,}3s}{s^2+1{,}2s+0{,}35}=\frac{0{,}3s}{(s+0{,}5)(s+0{,}7)}$$

$$s^2+1{,}2s+0{,}35=0$$

$$s_{1,2}=\frac{-1{,}2\pm\sqrt{1{,}2^2-4\cdot 0{,}35}}{2}=\frac{-1{,}2\pm 0{,}2}{2}=\begin{matrix}-0{,}7\\-0{,}5\end{matrix}$$

Zérusok: $z_1=z_2=0$ **/1 pont** és a pólusok: $\begin{matrix}p_1=-0{,}7\\p_2=-0{,}5\end{matrix}$ **/1 pont**

G-V stabilitás feltétele, hogy Re{p_i}<0 minden „i”-re. Ez most teljesül, tehát a rendszer G-V stabil. **/1 pont**

Mivel a rendszer két késleltetőt tartalmaz, így a sajátértékek megegyeznek a pólusokkal, tehát a rendszer aszimptotikusan stabil is.

(c)

Impulzusválasz meghatározása:

$$H(s)=\frac{0{,}3s}{s^2+1{,}2s+0{,}35}=\frac{A}{s+0{,}5}+\frac{B}{s+0{,}7}$$

Mindkét oldalt megszorozva $(s+0{,}5)(s+0{,}7)$-el:

$$0{,}3s=A(s+0{,}7)+B(s+0{,}5)$$

$$s^0.:0=0{,}7A+0{,}5B$$

$$s^1.:0{,}3=A+B$$

$$A=-0{,}75;$$

$$B=1{,}05$$

Vagy a „letakarásos” módszerrel:

$$A=\left.\frac{0{,}3s}{s+0{,}7}\right|_{s=-0{,}5}=\frac{-0{,}15}{0{,}2}=-0{,}75$$

$$B=\left.\frac{0{,}3s}{s+0{,}5}\right|_{s=-0{,}7}=\frac{-0{,}21}{-0{,}2}=1{,}05$$

„A” meghatározása **/1 pont**, B meghatározása **/1 pont**,

$H(s)=\frac{-0{,}75}{s+0{,}5}+\frac{1{,}05}{s+0{,}7}$ végső alak **/1 pont**.

Inverz-transzformációval:

$h(t)=\varepsilon(t)[-0{,}75e^{-0{,}5t}+1{,}05e^{-0{,}7t}]$ **/2 pont**

(d)

$u(t)=\varepsilon(t-2)\rightarrow U(s)=\frac{1}{s}e^{-2s}$ **/2 pont**

A válasz Laplace-transzformáltja:

$Y(s)=H(s)U(s)=\frac{0{,}3s}{(s+0{,}5)(s+0{,}7)}\cdot\frac{1}{s}e^{-2s}$ **/2 pont**

Részlettörtekre bontás:

$$\frac{0{,}3e^{-2s}}{(s+0{,}5)(s+0{,}7)} = e^{-2s}\left(\frac{A}{s+0{,}5}+\frac{B}{s+0{,}7}\right)$$

Mindkét oldalt megszorozva $(s+0{,}5)(s+0{,}7)$-el:

$0{,}3 = A(s+0{,}7)+B(s+0{,}5)$

$s^1.: 0 = A+B$

$s^0.: 0{,}3 = 0{,}7A+0{,}5B$

$A = 1{,}5$

$B = -1{,}5$

Vagy a „letakarásos” módszerrel:

$$A = \left.\frac{0{,}3}{(s+0{,}7)}\right|_{s=-0{,}5} = \frac{0{,}3}{0{,}2} = 1{,}5$$

$$B = \left.\frac{0{,}3}{(s+0{,}5)}\right|_{s=-0{,}7} = \frac{0{,}3}{-0{,}2} = -1{,}5$$

„A” és B **1-1 pont**:

$$Y(s) = e^{-2s}\left(\frac{1{,}5}{s+0{,}5}+\frac{-1{,}5}{s+0{,}7}\right)$$

Inverz transzformációval a válasz időfüggvénye:

$$y(t) = \varepsilon(t-2)[1{,}5e^{-0{,}5(t-2)} - 1{,}5e^{-0{,}7(t-2)}]$$ **/3 pont**

2. Nagypélda (Megoldását külön lapra kérjük!)

A diszkrét idejű rendszer impulzusválasza:

$$h[k]=\left(2\cdot(0{,}3)^{k}+k(0{,}3)^{k-1}\right)\cdot\varepsilon[k]$$

(a) Létezik-e a rendszer $H(e^{j\vartheta})$ átviteli karakterisztikája? Ha igen indokolja meg, és adja meg normálalakban! Ha nem létezik, válaszát indokolja! /4 pont/

(b) A rendszer gerjesztése a következő, egy periódusával adott nem belépő periodikus jel: $u[0]=0$, $u[1]=0{,}4$, $u[2]=0{,}8$, $u[3]=1{,}2$ L=4! Adja meg a rendszer $y[k]$ válaszát! /16 pont/

(a) Az átviteli karakterisztika az impulzusválasz diszkrét Fourier-transzformáltja.
Az átviteli karakterisztika létezik, mert az impulzusválasz abszolút összegezhető. **/1 pont**

$$H(e^{j\vartheta})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\cdot e^{-j\vartheta k}$$

$$H(e^{j\vartheta})=\frac{2e^{j\vartheta}}{e^{j\vartheta}-0{,}3}+\frac{e^{j\vartheta}}{\left(e^{j\vartheta}-0{,}3\right)^{2}}=\frac{2e^{j\vartheta}\left(e^{j\vartheta}-0{,}3\right)+e^{j\vartheta}}{\left(e^{j\vartheta}-0{,}3\right)^{2}}=\frac{2e^{2j\vartheta}-0{,}6e^{j\vartheta}+e^{j\vartheta}}{\left(e^{j\vartheta}-0{,}3\right)^{2}}=\frac{2e^{2j\vartheta}+0{,}4e^{j\vartheta}}{\left(e^{j\vartheta}-0{,}3\right)^{2}}=$$

$$=\frac{2e^{2j\vartheta}+0{,}4e^{j\vartheta}}{e^{2j\vartheta}-0{,}6e^{j\vartheta}+0{,}09}=\frac{2+0{,}4e^{-j\vartheta}}{1-0{,}6e^{-j\vartheta}+0{,}09e^{-2j\vartheta}}$$

/3 pont

(b)

Fejtsük Fourier-sorba a megadott gerjesztést:

$$u[k]=U_0+\sum_{p=1}^{M}U_p\cos\left(p\Theta k+\rho_p\right)+U_{\frac{L}{2}}(-1)^{k}$$

$$L=4\rightarrow M=\frac{L}{2}-1=1$$

$$\Theta=\frac{2\pi}{L}=\frac{\pi}{2}$$

$$U_p^C=\frac{1}{L}\sum_{L}u[k]e^{-jp\Theta k}$$ **/1 pont** (a diszkrét körfrekvenciáért)

$$U_0=U_0^C;\quad U_p=2\left|U_p^C\right|;\quad \rho_p=arc\left\{U_p^C\right\};\quad U_{\frac{L}{2}}=U_{\frac{L}{2}}^C$$

Behelyettesítéssel adódnak az egyes komponensek:

$$U_0^c=\frac{1}{4}(0+0{,}4+0{,}8+1{,}2)=0{,}6$$ **/1 pont**

$$U_1^c=\frac{1}{4}\left(0+0{,}4e^{-j\frac{\pi}{2}}+0{,}8e^{-j\frac{\pi}{2}2}+1{,}2e^{-j\frac{\pi}{2}3}\right)=\frac{1}{4}(-0{,}4j-0{,}8+1{,}2j)=-0{,}2+0{,}2j=0{,}2\sqrt{2}e^{j3\frac{\pi}{4}}$$

/2 pont

$$U_2^c=\frac{1}{4}\left(0+0{,}4e^{-j2\frac{\pi}{2}}+0{,}8e^{-j2\frac{\pi}{2}2}+1{,}2e^{-j2\frac{\pi}{2}3}\right)=\frac{1}{4}(-0{,}4+0{,}8-1{,}2)=-0{,}2$$

/2 pont

Ezek alapján:

$$U_0=0{,}6;\quad U_1=0{,}4\sqrt{2};\quad \rho_1=3\frac{\pi}{4};\quad U_2=-0{,}2$$

A gerjesztés időfüggvénye:

$$u[k] = 0{,}6 + 0{,}4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}k + 3\frac{\pi}{4}\right) - 0{,}2\cos(\pi k) =$$

/2 pont

$$= 0{,}6 + 0{,}4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}k + 3\frac{\pi}{4}\right) - 0{,}2(-1)^k$$

Az átviteli tényezők számítása:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{2 + 0{,}4e^{-j\vartheta}}{1 - 0{,}6e^{-j\vartheta} + 0{,}09e^{-2j\vartheta}}$$

$$H(e^{j0}) = \frac{2 + 0{,}4e^{-j0}}{1 - 0{,}6e^{-j0} + 0{,}09e^{-2j0}} = \frac{2 + 0{,}4}{1 - 0{,}6 + 0{,}09} = \frac{2{,}4}{0{,}49} = 4{,}899$$ **/1 pont**

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{2 + 0{,}4e^{-j\frac{\pi}{2}}}{1 - 0{,}6e^{-j\frac{\pi}{2}} + 0{,}09e^{-2j\frac{\pi}{2}}} = \frac{2 - 0{,}4j}{1 + 0{,}6j - 0{,}09} = \frac{2 - 0{,}4j}{0{,}91 + 0{,}6j} = \frac{2{,}04e^{-0{,}197j}}{1{,}09e^{0{,}583j}} =$$ **/1 pont**

$$= 1{,}872e^{-j0{,}78} = 1{,}33 - 1{,}317j$$

$$H(e^{j\pi}) = \frac{2 + 0{,}4e^{-j\pi}}{1 - 0{,}6e^{-j\pi} + 0{,}09e^{-2j\pi}} = \frac{2 - 0{,}4}{1 + 0{,}6 + 0{,}09} = \frac{1{,}6}{1{,}69} = 0{,}947$$ **/1 pont**

A válaszjel komplex amplitúdója:

$$Y(e^{j0}) = H(e^{j0})U_0 = 4{,}899 \cdot 0{,}6 = 2{,}9394$$ **/1 pont**

$$Y(e^{j\pi/2}) = H(e^{j\pi/2})U_1 = 1{,}872e^{-j0{,}78} \cdot 0{,}4\sqrt{2}e^{j3\frac{\pi}{4}} = 1{,}059e^{j1{,}576}$$ **/1 pont**

$$Y(e^{j\pi}) = H(e^{j\pi})U_2 = 0{,}947 \cdot (-0{,}2) = -0{,}1894$$ **/1 pont**

A válasz időfüggvénye:

$$y[k] = 2{,}9394 + 1{,}059\cos\left(\frac{\pi}{2}k + 1{,}576\right) - 0{,}1894\cos(\pi k) =$$

/2 pont

$$= 2{,}9394 + 1{,}059\cos\left(\frac{\pi}{2}k + 1{,}576\right) - 0{,}1894(-1)^k$$

Jelek és rendszerek 2. ZH B csoport

Kispéldák (A megoldást a feladat szövege alá írja! Minden kispélda 2 pontot ér. Csak a végeredményt kérjük odaírni, a levezetésre, részeredményekre részpontszám nem jár!)

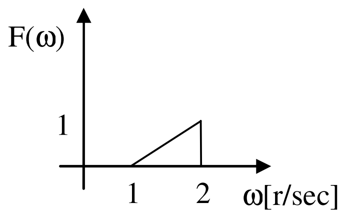
1. Adja meg a következő DI hálózat impulzusválaszát átviteli függvénye alapján: $H(z) = 1 - 2z^{-2} + z^{-4}$!

   $h[k] = \delta[k] - 2\delta[k-2] + \delta[k-4]$

2. Adott egy FI rendszer átviteli függvénye. Adja meg az impulzusválaszának $+0$-ban felvett értékét a kezdetiérték tétel felhasználásával! $H(s) = \dfrac{0{,}3s}{s^2 + 1{,}2s + 0{,}35}$

$$\lim_{s\to\infty} sH(s) = \lim_{t\to+0} h(t) = \lim_{s\to\infty} s\frac{0{,}3s}{s^2+1{,}2s+0{,}35} = \lim_{s\to\infty}\frac{0{,}3s^2}{s^2+1{,}2s+0{,}35} = 0{,}3 = \lim_{t\to+0} h(t)$$

3. Határozza meg a jel energiáját, ha a jel spektruma a következő:



$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_1^2 |\omega - 1|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_1^2 (\omega^2 - 2\omega + 1) d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\omega^3}{3} - 2\frac{\omega^2}{2} + \omega\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{8}{3} - 2\frac{4}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2} + 1\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{3} = \frac{1}{6\pi} = 0{,}053$$

4. Adja meg az $x(t) = \varepsilon(t-1)e^{-0{,}5(t-1)}$ jel amplitúdó-spektrumának maximális értékét, ha α > 0!

Megoldás: az $f(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t}$ jel spektruma $F(j\omega) = \dfrac{1}{\alpha + j\omega}$

Az eltolási tétel értelmében az időben eltolt jel spektruma $X(j\omega) = F(j\omega)e^{-j\omega}$

Az amplitúdó spektrum az eltolás hatására nem változik, maximális értéke $\left.X(j\omega)\right|_{\max} = \dfrac{1}{\alpha} = 2$.

5. Konvolváljon két -T…T hosszúságú négyszögimpulzust, adja meg a keletkező jel spektrumát!

Egy négyszögjel esetén: $F(j\omega) = 2T\dfrac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} = 2T\dfrac{\sin(\omega T)}{\omega T}$

Konvolúció esetén a jelek spektruma összeszorzódik, ezért a keletkező jel spektruma:

$$\left(2T\frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT}\right)^2 = \left(2T\frac{\sin(\omega T)}{\omega T}\right)^2$$

6. Ha $\mathcal{F}\{h[k]\} = H(e^{j\vartheta})$ és $\mathcal{F}\{u[k]\} = U(e^{j\vartheta})$, akkor írja fel a két időtartománybeli jel konvolúciójának spektrumát!

$$\mathcal{F}\{h[k] * u[k]\} = H(e^{j\vartheta})U(e^{j\vartheta})$$

7. Egy DI rendszer bemeneti jele $u[k] = 0{,}5\cos(3\pi k + \sqrt{2})$, átviteli karakterisztikája $H(e^{j\vartheta}) = \dfrac{4}{3 + e^{-j\vartheta}}$. Adja meg a rendszer válaszjelét!

$$H(\vartheta = 3\pi) = \frac{4}{3 + e^{-j3\pi}} = \frac{4}{3-1} = 2 \qquad y[k] = \cos(3\pi k + \sqrt{2})$$

8. Egy DI rendszer gerjesztése $u[k] = 2\delta[k]$. Válasza: $y[k] = \varepsilon[k](0{,}4)^k$. Adja meg a rendszer átviteli függvényét!

$$H(z) = \frac{0{,}5z}{(z - 0{,}4)}$$

9. Egy FI, GV stabilis, kauzális rendszer átviteli karakterisztikájának ismeretében írja fel az átviteli függvényt!

$$H(s) = H(j\omega)\big|_{j\omega = s}$$

10. Adott $f(t) = 2e^{j\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$ FI jel. Rajzolja fel a jel amplitúdó-spektrumát!