Megoldás

1. feladat — 24 pont

- Hol deriválható az
$$f(x) = \sin\left(\frac{2x^3 \operatorname{arctg}(x^2)}{2^x}\right)$$
függvény? Adja meg a deriváltfüggvényt!
- Hol deriválható a
$$g(x) = |x| \ln(|x|+1)$$
függvény? Adja meg a deriváltfüggvényt!

Megoldás:

- $f'(x) = \cos\left(\frac{2x^3 \operatorname{arctg}(x^2)}{2^x}\right) \frac{\left(6x^2 \operatorname{arctg}(x^2) + 2x^3 \frac{2x}{x^4+1}\right) 2^x - 2x^3 \operatorname{arctg}(x^2)\, 2^x \ln 2}{4^x}$

  $\boxed{\textbf{12p.}}$

  (Mindenhol deriválható.)

- $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{|x|}{x}}_{\text{korl. } (\pm 1)} \underbrace{\ln(|x|+1)}_{\to 0}\right) = 0$

  Ha $x > 0$, akkor $g'(x) = (x \ln(x+1))' = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$.

  Ha $x < 0$, akkor $g'(x) = (-x \ln(1-x))' = -\ln(1-x) + \frac{x}{1-x}$. $\boxed{\textbf{12p.}}$

  (Mindenhol deriválható.)

2. feladat — 26 pont

Adja meg a következő határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(x^3 \cdot \ln^2 x\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{x^2}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}$

Megoldás:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\underbrace{x^3}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln^2 x}_{\to\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{x^{-3}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{2\ln x}{-3x^{-3}} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}\text{L'H}}{=\!=}$

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{x}}{9x^{-4}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{2x^3}{9} = 0$ $\boxed{\textbf{11p.}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$ $\boxed{\textbf{11p.}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\overbrace{\ln^2 x}^{\to\infty}}{\underbrace{x^2}_{\to 0+}} = \infty$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

3. feladat **25 pont**

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az

$$f(x) = \frac{x^3 + 9x^2 + 15x + 15}{x + 1}$$

függvény szigorúan monoton!

Hol van lokális szélsőértéke?

Van-e globális minimuma illetve maximuma?

Megoldás: $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 18x + 15)(x + 1) - (x^3 + 9x^2 + 15x + 15)}{(x + 1)^2} = \dfrac{2x(x + 3)^2}{(x + 1)^2}$

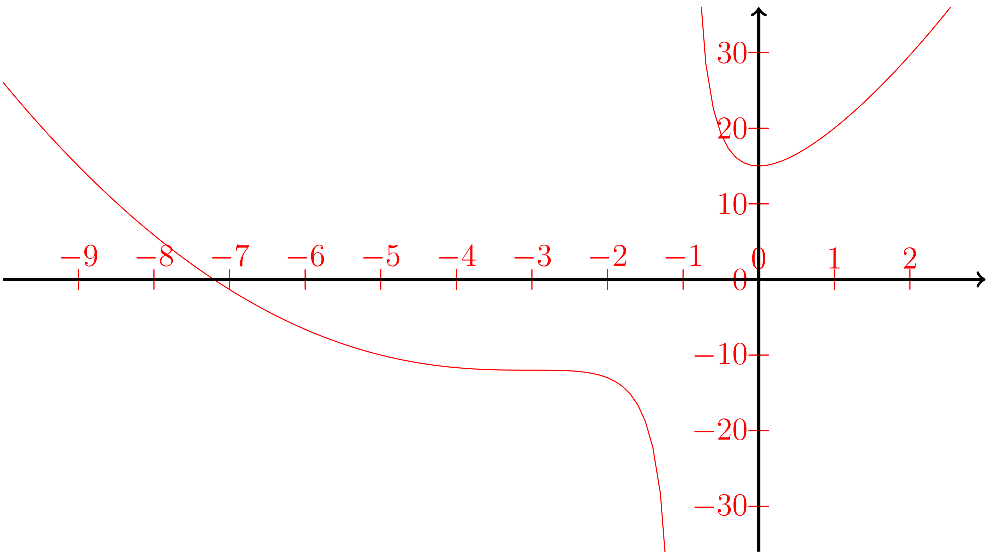
$\boxed{\textbf{5p.}}$

gyökei $x_1 = 0$ és $x_{2,3} = -3$

	$]-\infty, -3[$	-3	$]-3, -1[$	$]-1, 0[$	0	$]0, \infty[$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
f'	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$

Az f függvény szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty, -1[$ és a $]-1, 0]$ intervallumokon.
Az f függvény szigorúan monoton növő a $[0, \infty[$ intervallumon.
Lokális minimuma van a 0-ban. $\boxed{\textbf{15p.}}$

Globális minimuma és maximuma nincs, mert $\lim\limits_{x \to -1\pm} \dfrac{\overbrace{x^3 + 9x^2 + 15x + 15}^{\to 8}}{\underbrace{x + 1}_{\to 0\pm}} = \pm\infty$ $\boxed{\textbf{5p.}}$



4. feladat **25 pont**

Igazolja , hogy az

$$(x(t), y(t)) = (3t + e^{t+1}, t^6 + t^4 + 6t)$$

paraméteresen megadott görbe egy $y = f(x)$ függvény grafikonja!

Adja meg $t_0 = -1$ paraméterhez tartozó $(x(t_0), y(t_0))$ pontbeli érintő egyenletét, ha létezik!

Megoldás: Mivel $x'(t) = 3 + e^{t+1} > 0$, ezért $x(t)$ szigorúan monoton növő, így létezik inverze. Ha ez $t = \varphi(x)$, akkor $f(x) = y(\varphi(x))$ megfelelő. $\boxed{\textbf{10p.}}$

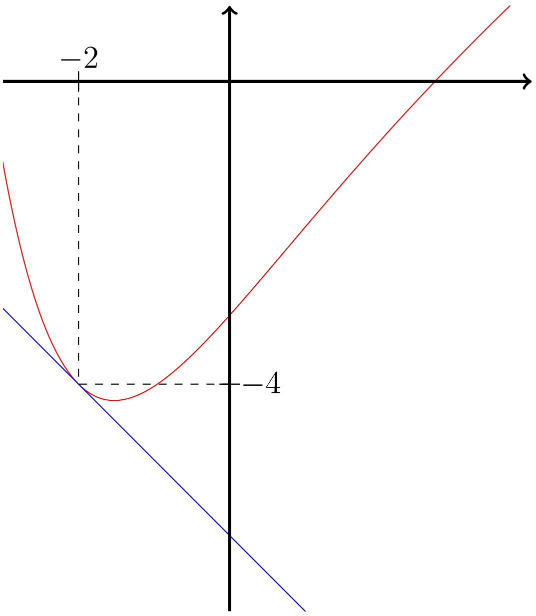
$x_0 = x(t_0) = x(-1) = -2$

$f(x_0) = y_0 = y(t_0) = y(-1) = -4$

$y'(t) = 6t^5 + 4t^3 + 6$

$f'(x_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{y'(-1)}{x'(-1)} = \dfrac{-4}{4} = -1$

Az érintő egyenlete $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -(x - (-2)) + (-4) = -x - 6$ $\boxed{\textbf{15p.}}$



IMSC **feladat** **8 pont**

Van-e az $f(x) = x^5 - 10x^3 + 48x + 2$ és a $g(x) = x^6 - 10x^3 + 48$ függvények között olyan, ami invertálható, és inverze deriválható az $a = 2$ helyen? Ha igen, válasszon egy ilyet, és adja meg az inverzének a 2-beli deriváltját!

Megoldás: $f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 48 = 5\left(x^2 - 3\right)^2 + 3 > 0$, így f szigorúan monoton növő, ezért invertálható.

$f^{-1}(2) = x \iff f(x) = 2 \iff x = 0.$

Mivel $f'(0) = 3 \neq 0$, ezért f^{-1} deriválható $f(0) = 2$-ben, és $\left(f^{-1}\right)'(2) = \left(f^{-1}\right)'(f(0)) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3}$.