Rendszerelmélet 2.HF

2017.11.10.

1. feladat

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} -0{,}0925 & -0{,}1383 \\ 0{,}0113 & -0{,}3075 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -8 \\ -6{,}5 \end{bmatrix} u$$

$$y = [14{,}6 \quad -5{,}4] \underline{x} + 0 \cdot u$$

$$\det(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = \lambda^2 + \underbrace{0{,}4}_{a_1}\lambda + 0{,}03$$

$$\lambda_1 = -0{,}1$$

$$\lambda_2 = -0{,}3$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{M}}_c = [\underline{B} \quad \underline{\underline{A}}\underline{B}] \\ \tau(a) = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \underline{\underline{T}}_c = \left(\underline{\underline{M}}_c \cdot \tau(a)\right)^{-1}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A}}_c = \underline{\underline{T}}_c \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}}_c^{-1} \qquad \underline{B}_c = \underline{\underline{T}}_c \cdot \underline{B} \qquad \underline{C}_c^T = \underline{C}^T \cdot \underline{\underline{T}}_c^{-1}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A}}_o = \underline{\underline{A}}_c^T \qquad \underline{B}_o = \underline{C}_c \qquad \underline{C}_o^T = \underline{B}_c^T$$

$$\underline{\underline{P}}_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{T}}_d = \left(\underline{\underline{M}}_c \cdot \tau(a) \cdot \underline{\underline{P}}_n\right)^{-1}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{T}}_d \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}}_d^{-1} \qquad \underline{B}_d = \underline{\underline{T}}_d \cdot \underline{B} \qquad \underline{C}_d^T = \underline{C}^T \cdot \underline{\underline{T}}_d^{-1}$$

Megjegyzések:
- nekem az $\underline{\underline{A}}_c$ és ezáltal az $\underline{\underline{A}}_o$ is helytelen, fogalmam sincs miért
- $\underline{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$-t és $\underline{C}_o^T = [1 \ 0]$-t valamiért elfogadja, pedig nem ez jön ki
- $\underline{\underline{A}}_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ lesz jó megoldás

2. feladat

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 18 & -7 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 17 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} + 10u$$

$\underline{\underline{M}}_o, \underline{\underline{M}}_c = ?$ irányítható? Megfigyelhető?

$$\underline{\underline{M}}_o = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \underline{\underline{A}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 17 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & -7 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 336 & -59 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}}_o = \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 336 & -59 \end{bmatrix} \qquad \det(\underline{\underline{M}}_o) = -2011 \neq 0 \Rightarrow \text{megfigyelhető}$$

$$\underline{\underline{M}}_c = \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{\underline{A}}\underline{B} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\underline{B} = \begin{bmatrix} 18 & -7 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 247 \\ -30 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}}_c = \begin{bmatrix} 11 & 247 \\ -7 & -30 \end{bmatrix} \qquad \det(\underline{\underline{M}}_c) = 1399 \neq 0 \Rightarrow \text{irányítható}$$

3. feladat

$$\underline{x}[k+1] = \begin{bmatrix} 1{,}8177 & -1{,}3171 \\ 0{,}0848 & 1{,}9246 \end{bmatrix} \underline{x}[k] + \begin{bmatrix} 17{,}9 \\ -16 \end{bmatrix} u$$

$$y[k] = [15{,}2 \;\; -9{,}4]\, \underline{x}[k] + 6{,}8u$$

$\lambda_{1,2} = ?$ ASZ? Ha $\tilde{\lambda}_1 = 0{,}7$ és $\lambda_2 = -0{,}6$: $\underline{k}^T = ?$ $\underline{\underline{M}}_c$, $\underline{\underline{M}}_c^{-1}$, $\varphi_c(\underline{\underline{A}}) = ?$

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - 1{,}8177)(\lambda - 1{,}9246) + 1{,}3171 \cdot 0{,}0848 =$$

$$= \lambda^2 - 1{,}9246\lambda - 1{,}8177\lambda + 3{,}4983 + 0{,}1117 =$$

$$= \lambda^2 - 3{,}7423\lambda + 3{,}61 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3{,}7423 \pm \sqrt{\overbrace{14{,}0048 - 14{,}44}^{-0{,}4352}}}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 1{,}8712 + 0{,}3298j \\ \searrow \lambda_2 = 1{,}8712 - 0{,}3298j \end{matrix}$$

$|\lambda_1| = 1{,}9 \not< 1$

$\Rightarrow$ Nem ASZ

$$\underline{k}^T = [0 \;\; 1] \cdot \underline{\underline{M}}_c^{-1} \cdot \varphi_c(\underline{\underline{A}}) \qquad \underline{\underline{M}}_c = [\underline{B} \;\; \underline{\underline{A}}\underline{B}]$$

$$\underline{\underline{M}}_c = \begin{bmatrix} 17{,}9 & 34{,}6442 \\ -1{,}6 & -1{,}5614 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{M}}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -1{,}5614 & -34{,}6442 \\ 1{,}6 & 17{,}9 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{83{,}3798} = \begin{bmatrix} -0{,}0187 & -0{,}4155 \\ 0{,}0192 & 0{,}2147 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_c(\tilde{\lambda}) = (\lambda - 0{,}7)(\lambda + 0{,}6) = \lambda^2 - 0{,}1\lambda - 0{,}42$$

$$\varphi_c(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}}^2 - 0{,}1\underline{\underline{A}} - 0{,}42\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1{,}8177 & -1{,}3171 \\ 0{,}0848 & 1{,}9246 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}8177 & -1{,}3171 \\ 0{,}0848 & 1{,}9246 \end{bmatrix} - \overbrace{\begin{bmatrix} 0{,}6018 & 0{,}2883 \\ 0{,}4285 & 0{,}6125 \end{bmatrix}}^{(0{,}1\underline{\underline{A}} + 0{,}42\underline{\underline{E}})} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3{,}1923 & -4{,}929 \\ 0{,}3173 & 3{,}5924 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}6018 & 0{,}2883 \\ 0{,}4285 & 0{,}6125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5905 & -5{,}2173 \\ -0{,}1112 & 2{,}9799 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}^T = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} -0{,}0187 & -0{,}4155 \\ 0{,}0192 & 0{,}2147 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}5905 & -5{,}2173 \\ -0{,}1112 & 2{,}9799 \end{bmatrix} = [0{,}0192 \;\; 0{,}2147] \begin{bmatrix} 2{,}5905 & -5{,}2173 \\ -0{,}1112 & 2{,}9799 \end{bmatrix} =$$

$$= [0{,}0259 \;\; 0{,}5396]$$

Megjegyzés:
- Alapvetően jó, csak a $\underline{B}$ második értéke (-16) helyett (-1,6)-tal számoltam

4. Példa

$$\underline{x}'(t) = \begin{bmatrix} -12,0467 & -3,5022 \\ -0,5201 & -16,9533 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 3,3 \\ 19,1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [-18,7 \quad -0,7]\,\underline{x}(t) + 14,8\,u(t)$$

$$H(j\omega) = ?$$

$$H(j\omega) = \underline{C}^T [j\omega \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}]^{-1} \underline{B} + D$$

$$[j\omega \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}]^{-1} = \begin{bmatrix} j\omega + 12,0467 & 3,5022 \\ 0,5201 & j\omega + 16,9533 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\det(j\omega \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = (j\omega + 12,0467)(j\omega + 16,9533) - 1,8215 =$$

$$= (j\omega)^2 + 29 j\omega + 202,4098$$

$$\Rightarrow [j\omega \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}]^{-1} = \begin{bmatrix} j\omega + 16,9533 & -3,5022 \\ -0,5201 & j\omega + 12,0467 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(j\omega)^2 + 29 j\omega + 202,4098} \quad ⊛$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{[-18,7 \quad -0,7] \begin{bmatrix} j\omega + 16,9533 & -3,5022 \\ -0,5201 & j\omega + 12,0467 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,3 \\ 19,1 \end{bmatrix} + \overbrace{14,8 \cdot (j\omega)^2 + 429,2 j\omega + 2995,665}^{⊛}}{\underbrace{(j\omega)^2 + 29 j\omega + 202,4098}_{●}} =$$

$$= \frac{[-18,7 j\omega - 316,6626 \quad -0,7 j\omega + 57,0585] \begin{bmatrix} 3,3 \\ 19,1 \end{bmatrix} + ⊛}{●} =$$

$$= \frac{-61,71 j\omega - 6048,2557 - 2,31 j\omega + 1089,8174 + 14,8 (j\omega)^2 + 429,2 j\omega + 2995,665}{(j\omega)^2 + 29 j\omega + 202,4098} =$$

$$= \frac{14,8 (j\omega)^2 + 365,18 j\omega - 1962,7733}{(j\omega)^2 + 29 j\omega + 202,4098} = H(j\omega)$$

Megjegyzés: · A számlálóban a konstans értéke hibás, baszódjon meg az előjel.

5. feladat

$$\underline{x}[k+1]=\begin{bmatrix}0,5123 & -0,1415\\ 0,0185 & 0,2877\end{bmatrix}\underline{x}[k]+\begin{bmatrix}8,5\\36,5\end{bmatrix}u[k]$$

$$y[k]=[-12 \quad 19,1]\underline{x}[k]$$

$$H(e^{j\vartheta})=?$$

$$H(e^{j\vartheta})=\underline{C}^T[e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}]^{-1}\underline{B}+D$$

$$[e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}]=\begin{bmatrix}e^{j\vartheta}-0,5123 & 0,1415\\ -0,0185 & e^{j\vartheta}-0,2877\end{bmatrix}$$

$$\det(e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})=(e^{j\vartheta}-0,5123)(e^{j\vartheta}-0,2877)+0,0026=e^{2j\vartheta}-0,8e^{j\vartheta}+0,15$$

$$H(e^{j\vartheta})=\frac{[-12 \quad 19,1]\begin{bmatrix}e^{j\vartheta}-0,5123 & 0,1415\\ -0,0185 & e^{j\vartheta}-0,2877\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8,5\\36,5\end{bmatrix}}{e^{j2\vartheta}-0,8e^{j\vartheta}+0,15}=$$

$$=\frac{[-12e^{j\vartheta}\text{ [redacted] }+6,1476-0,3534 \quad -1,698+19,1e^{j\vartheta}-5,4951]\begin{bmatrix}8,5\\36,5\end{bmatrix}}{e^{j2\vartheta}-0,8e^{j\vartheta}+0,15}=$$

$$=\frac{-102e^{j\vartheta}+49,2507-262,5482+697,15e^{j\vartheta}}{e^{j2\vartheta}-0,8e^{j\vartheta}+0,15}=\frac{595,15e^{j\vartheta}-213,2975}{e^{j2\vartheta}-0,8e^{j\vartheta}+0,15}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(e^{j\vartheta})=\frac{595,15e^{-j\vartheta}-213,2975e^{-2j\vartheta}}{1-0,8e^{-j\vartheta}+0,15e^{-2j\vartheta}}$$

Megjegyzés: A számlálóban az $e^{-2j\vartheta}$ szorzója helytelen, fogalmam sincs miért.

6. feladat

$$x(t) = A \cdot |\sin(\frac{2\pi}{T} t)$$

$A = 0{,}4$

$X_1, X_2, X_3 = ?$

Képlet: $a_0 = \frac{2A}{\pi}$

$$a_n = \frac{-4A}{\pi(*n^2-1)}$$

$*4\cdot$

7. feladat

$x[0]=-9{,}6 \quad x[1]=-8{,}2 \quad x[2]=8{,}7 \quad x[3]=-2$

$$u[k]=U_1+U_2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{L}k+\varphi_1\right)+U_3\cdot\cos\left(2\frac{2\pi}{L}k\right)$$

$$L=4 \Longrightarrow \Theta=\frac{2\pi}{L}=\frac{\pi}{2}$$

$$U_p^c=\frac{1}{L}\cdot\sum_{k=\langle L\rangle} x[k]\cdot e^{-jp\Theta k}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=0}^{3} x[k]\cdot e^{-jp\frac{\pi}{2}k}$$

(A megoldás képletében U_1)

$$U_0^c=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}x[k]\cdot\underbrace{e^{-j\cdot 0\cdot\frac{\pi}{2}k}}_{=1}=\frac{1}{4}(-9{,}6-8{,}2+8{,}7-2)=-2{,}775$$

$$U_1^c=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}x[k]\cdot e^{-j\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}k}=\frac{1}{4}\left(-9{,}6e^{-j\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 0}-8{,}2e^{-j\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1}+\dots\right)=4{,}5616\cdot e^{j2{,}6755}=$$

$$=9{,}1232\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}k+2{,}6755\right)$$

$U_2^c=\dots$

8. feladat

$$H(j\omega) = \frac{-9j\omega + 9}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 4}$$

$$u(t) = 5 + 11\cos(2t) + \cos(4t)$$

$$H_0(j\omega_0),\ H_1(j\omega_1),\ H_2(j\omega_2) = ?$$

$$y(t) = Y_0 + Y_1 \cdot \cos(2t + \varphi_1) + Y_2 \cdot \cos(4t + \varphi_2)$$

$U_0 = 5 \quad \omega_0 = 0 \quad , \quad U_1 = 11 \quad \omega_1 = 2 \quad , \quad U_2 = 1 \quad \omega_2 = 4$

$$H_0(j\omega_0) = \frac{9}{4} = 2{,}25 \qquad \bar{Y}_0 = H_0 \cdot U_0 = 11{,}25 \rightarrow Y_0 = 11{,}25$$

$$H_1(j\omega_1) = \frac{-18j + 9}{6j} = \ldots = 3{,}3541 \cdot e^{j(-2{,}6779)}$$

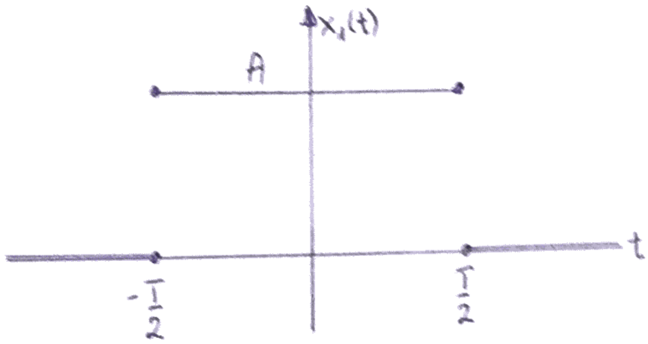
$$\hookrightarrow \bar{Y}_1 = H_1 \cdot U_1 = 36{,}8951 \cdot e^{j(-2{,}6779)} \rightarrow 36{,}8951 \cdot \cos(2t - 2{,}6779) = Y_1 \cdot \cos(2t + \varphi_1)$$

$$H_2(j\omega_2) = \frac{-36j + 9}{12j - 12} = \ldots = 2{,}1866 \cdot e^{j(-3{,}682)}$$

$$\hookrightarrow \bar{Y}_2 = H_2 \cdot U_2 = 2{,}1866 \cdot e^{j(-3{,}682)} \rightarrow 2{,}1866 \cdot \cos(4t - 3{,}682)$$

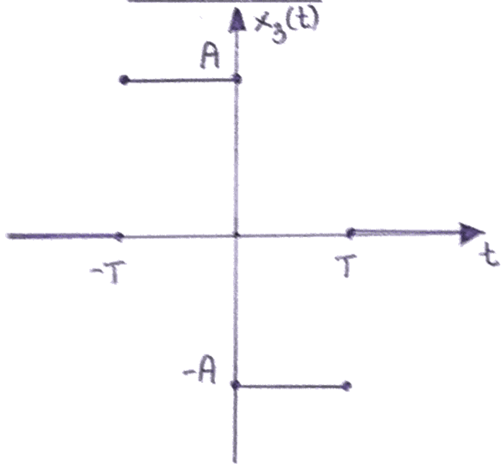
Megjegyzés:
- Az első felharmonikus fázisa rossz, pedig az átviteli karakterisztika eltolása helyes, a gerjesztésnek meg nincs.
- A 9. feladat lényegében ugyanez, azt ezért ki se dolgozom.

10. feladat



• A 10. heti gyakorlaton ezt megcsináltuk, ha nincs meg írj és akkor küldök hozzá linket.

11. feladat



Magic képlet: $X_3(j\omega) = 2AT \dfrac{\sin^2(\omega \frac{T}{2})}{\omega \frac{T}{2}}$

12. feladat

• Ugyanaz, mint a 10. feladat, csak el van tolva.