1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal 2008/09 tél A3

1. Oldja meg az $y'' - 4y' + 4y = \cos x$ differenciálegyenletet Laplace-transzformáció alkalmazása nélkül!

MO. 1) A karakterisztikus polinomnak egyetlen kettős gyöke a $\lambda = 2$, így a homogén egyenlet általános megoldása: $y_{há} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$. 2p

2) Az inhomogén egy partikuláris megoldását $y = A\sin x + B\cos x$ alakban keressük (az általános $x^m e^{ax}(p(x)\sin bx + q(x)\cos bx)$ alakban $a = 0$, $b = 1$, $p(x) = 0$, $q(x) = 1$, így, mivel az $a + bj = j$ nem gyöke a karakterisztikus polinomnak, $m = 0$, azaz $x^m e^{ax}(P(x)\sin bx + Q(x)\cos bx) = A\sin x + B\cos x)$. 3p

Ezzel tehát $y = A\sin x + B\cos x$, $y' = A\cos x - B\sin x$, $y'' = -A\sin x - B\cos x$, amit az erdeti egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $(-A + 4B + 4A)\sin x + (-B - 4A + 4B - 1)\cos x = 0$. Ebből $A = -\frac{4}{25}$, $B = \frac{3}{25}$, tehát az inhomogén egy partikuláris megoldása $y_{ip} = -\frac{4}{25}\sin x + \frac{3}{25}\cos x$, 3p

amivel az inhomogén általános megoldása:

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - \frac{4}{25}\sin x + \frac{3}{25}\cos x.$$ 2p

10p

2. Vizsgálja meg, hogy mely $n \geq 0$ egészekre és hol létezik a $v(r) = r|r|^n$, $r \in \mathbb{R}^3$ függvény divergenciája és ahol létezik ott adja meg, mint r és n függvényét!

MO. v minden n-re az origó kivételével deriválható függvényekből áll elő deriválhatóságot megőrző módon, így ott létezik a div és

$$\operatorname{div} r|r|^n = |r|^n \operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad}|r|^n = 3|r|^n + r \cdot n|r|^{n-1}\frac{r}{|r|} = 3|r|^n + n|r|^n = (3+n)|r|^n. \ (*)$$ 4p

v az origóban is deriválható, $n > 0$-ra $\dfrac{r|r|^n - 0 - 0\,r}{|r|} = r|r|^{n-1} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ így $v' = 0$, aminek a skalárinvariánsa 0, tehát a divergencia az origóban is 0. 4p

Ha $n = 0$, akkor $\operatorname{div} v(r) = \operatorname{div} r = 3$ mindenütt. Tehát (*) minden $n \geq 0$ és $r \in \mathbb{R}^3$-re fennáll. 3p

10p

3. Legyen H az a h magas zárt kifele irányított zárt hengerfelület, melynek alaplapja az $[xy]$-síkbeli origóközéppontú R sugarú körlap. Legyen $v = v(r)$ az a vektorfüggvény, mely minden $\mathbb{R}^3$-beli vektorhoz annak $[xy]$ síkbeli vetületét rendeli hozzá. Számítsa ki v felületmenti integrálját H-n!

MO. Jelölések: $\int_F v\,df$ a v felületmenti, $\int_F v\,|df|$ a v felszín szerinti integrálja, tetszőleges G alakzat (görbe, felület vagy térrész) esetén $|G|$ az alakzat mértéke (ívhossza, felszíne ill. térfogata) és felhasználjuk, hogy $\int_F v\,df = \int_F v_n\,|df|$, ahol v_n a v-nek a felületi normálisra eső (skalár)vetülete.

(1) Az alap- és fedőlapon v merőleges a H normálisára, így ott a felületi integrál 0. 3p

A paláston v mindenütt párhuzamos H normálisával, így a normálisra eső (skalár)vetülete H-n az abszolútértéke, tehát H sugara. 3p

Így $\displaystyle\int_H v\,df = \int_H v_n|df| = \int_H R|df| = R\int_H |df| = R|H| = R \cdot 2R\pi h = 2R^2 h\pi.$ 4p

(2) v koordinátás alakja a következő:

$v(x, y, z) = (x, y, 0) \ \rightsquigarrow\ \operatorname{div} v = 2$. Így Gauss–Osztrogradszkij-tétellel: 5p

$$\int_V \operatorname{div} v\,dV = \int_V 2\,dV = 2\int_V dv = 2|V| = 2 \cdot R^2\pi \cdot h = 2R^2 h\pi.$$ 5p

10p

4. Legyen K egységnyi sugarú, origóközéppontú kör és $n > 0$ tetszőleges természetes szám. Mennyi az $\displaystyle\int_K \frac{e^{2z}}{z^{n+1}}\,dz$ integrál értéke?

MO. A Cauchy integrálformula szerint:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j}\int_K \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \ \rightsquigarrow\ \int_K \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = 2\pi j\,\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$ 5p

Itt most $a = 0$ és $f(z) = e^{2z} \rightsquigarrow f^{(n)}(0) = 2^n \rightsquigarrow \displaystyle\int_K \frac{e^{2z}}{z^{n+1}}\,dz = \pi j\,\frac{2^{n+1}}{n!}$ 5p

10p

Folytatás a következő oldalon.

5. Legyen f mindenütt reguláris függvény és $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2}$ ha $z \neq 0$. $f(0) = ?$, $f'(0) = ?$, $f''(0) = ?$

MO. $\cos z$ Taylor–sora: $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!} \mp \dots \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} \mp \dots, \text{ minden } z \neq 0\text{-ra}$$ **4p**

és a jobboldal mindenütt konvergens hatványsor, azaz határfüggvénye mindenütt reguláris és persze a sor határfüggvényének Taylor-sora **3p**

$$\text{amiből } f(0) = -\tfrac{1}{2}, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{12}.$$ **3p**

10p

6.

(a) Legyen v mindenütt folytonosan deriválható vektor-vektor függvény. Melyik igaz, melyik nem?
(1) $\operatorname{div} v$ a v mátrixában a főátlóbeli elemek összege.
(2) $\operatorname{div} v$ a v skalárinvariánsa.
(3) $\operatorname{div} v$ a v komponensei parciális deriváltjainak összege.
(4) $\operatorname{div} v$ a v mátrixának skalárinvariánsa.

(b) Legyen f tetszőleges komplex függvény és z_0 tetszőleges pont a komplex síkon. z_0 tetszőleges S környezete esetén z_0 *pontozott* környezetnek hívjuk azt a halmazt, mely S-ből z_0 elhagyásával keletkezik. Tegyük fel, hogy f nem reguláris a z-ben. Melyik igaz, melyik nem?
(1) z_0 izolált szingularitása f-nek ha z_0 tetszőlegesen kis sugarú pontozott környezetében f. reguláris.
(2) z_0 izolált szingularitása f-nek ha z_0 minden pontozott környezetében f reguláris.
(3) z_0 izolált szingularitása f-nek ha van z_0-nak olyan pontozott környezete, melyben f deriválható.
(4) z_0 izolált szingularitása f-nek ha van z_0-nak olyan pontozott környezete, melyben f reguláris.

MO.
(a) **1+1+1+1p**
Egyik sem

(b) **1+1p**
(1), (2): Nem **2+2p**
(1), (3): Igen

10p