A1 Matematika vizsgazárthelyi 2006.01.06

1. [15p] a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}=?$ b. $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\dfrac{1}{x^2})^{x^4}=?$

2. [10p] Írjuk fel a $\tan x$ függvény $x_0=\pi/4$ bázispontú differenciálját és ezzel adjuk meg a $\tan(\pi/4+0.02)$ közelítő értékét.

3. [15p] a. Soroljuk fel a lokális szélsőértékhelyről tanult tételeket.
b. Bizonyítsuk be, hogy egy monoton növő függvény deriváltja nemnegatív.
c. Igaz-e, hogy bármely szigorúan monoton növő (differenciálható) függvény deriváltja pozitív? Indokoljunk.

4. [15p] a. Végezzünk függvényvizsgálatot az $f(x)=x^{-3}\ln x$ függvényre.

5. [15p] a. $\int xe^{2x}dx=?$ b. $\int\limits_1^2\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=?$ $(x=\dfrac{1}{\cos t})$.

6. [15p] Adjuk meg az $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$ paraméterezésű görbe (asztroid) ívhosszát.

7. [15p] a. Konvergens-e az $\int\limits_0^\infty\dfrac{1-e^{-2x}}{x}dx$ integrál?

b. $\int\limits_{-4}^{4}\dfrac{dx}{(x+4)^{2/3}}=?$

Összpontszám 100 pont. Munkaidő 100 perc.
P=(1.zh + 2.zh + 3*vizsgazh)/5
Vizsgajegy határok P-re: 40, 55, 70, 85 pont. Jelesért szóbelizni is kell.

1) a) (6p) $\lim_{0} \frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x} \underset{\frac{0}{0},\ l'H}{=} \lim_{0} \frac{\frac{4}{3}(1+4x)^{-2/3}}{1} = \frac{4}{3}$

b) (9p) $\lim_{\infty} x^4 \ln\left(\cos \frac{1}{x^2}\right) \underset{\frac{1}{x^2}=y}{=}$

$= \lim_{0+} \frac{\ln(\cos y)}{y^2} \underset{\frac{0}{0},\ l'H}{=} \lim_{0+} \frac{-\tan y}{2y} \underset{l'H}{=} \lim_{0+} \frac{-\frac{1}{\cos^2 y}}{2} = -\frac{1}{2}$, $\lim_{\infty} \left(\cos \frac{1}{x^2}\right)^{x^4} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (7p)

2) $\tan x \approx \tan \frac{\pi}{4} + \tan' \frac{\pi}{4} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4} + 0.02\right) \approx 1 + 0.04 = 1.04$ (3p)

3) a) (6p) x_0 lok min (max) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \geq 0 \ (\leq 0)$

$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0 \ (< 0) \Rightarrow x_0$ lok min (max)

b) (5p) $0 \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$ miatt $f'(x_0) \geq 0$ [a monotonitás miatt $f(x)-f(x_0)$ elő

$= (x-x_0)$ előj

c) (3p) Nem igaz: $f(x) = x^3$ szig mon nő, de $f'(0) = 0$

4) $D_f = (x>0)$, $\lim_{0+} f = -\infty \Rightarrow x = 0$ aszimptota; $\lim_{+\infty} f = 0 \Rightarrow y = 0$ aszimpt (1p) (2p) (2p)

zh: $f(1) = 0$ $\quad f' = -3x^{-4} \ln x + x^{-3} \frac{1}{x} = x^{-4}(1 - 3\ln x)$

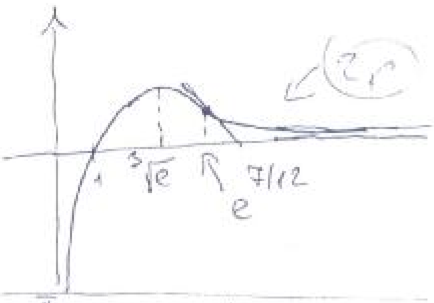
	$(0, \sqrt[3]{e})$	$(\sqrt[3]{e}, \infty)$
f	$\nearrow$	$\searrow$

(4p) lok max hely $\sqrt[3]{e}$

$f'' = -4x^{-5}(1 - 3\ln x) - \frac{3}{x} x^{-4} = x^{-5}(12 \ln x - 7)$

	$(0, e^{7/12})$	$(e^{7/12}, \infty)$
f	$\frown$	$\smile$

, inflexiós pont $e^{7/12}$ (4p)



5) a) (4p) $\int \underset{f}{x} \underset{g'}{e^{2x}}\,dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\,dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2x} + C$

b) (8p) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int_0^{\pi/3} \cos t \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}\ \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) dt =$

$x = \frac{1}{\cos t}$

$dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$

$= \left[\tan t - t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

6) $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_0^{2\pi} 3 \sqrt{\underbrace{\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t}_{\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4} \sin^2 2t}}\,dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2t|\,dt =$

$= \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = 6 \left[\frac{-\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$

7) a) (5p) Nem, mert $x > 1$-re $\frac{1-e^{-2x}}{x} > \frac{1-e^{-2}}{x}$ és $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergens

b) (8p) $\int_{-4}^{4} \frac{dx}{(x+4)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-4+\varepsilon}^{4} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[3(x+4)^{\frac{1}{3}}\right]_{-4+\varepsilon}^{4} = 3 \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 6$