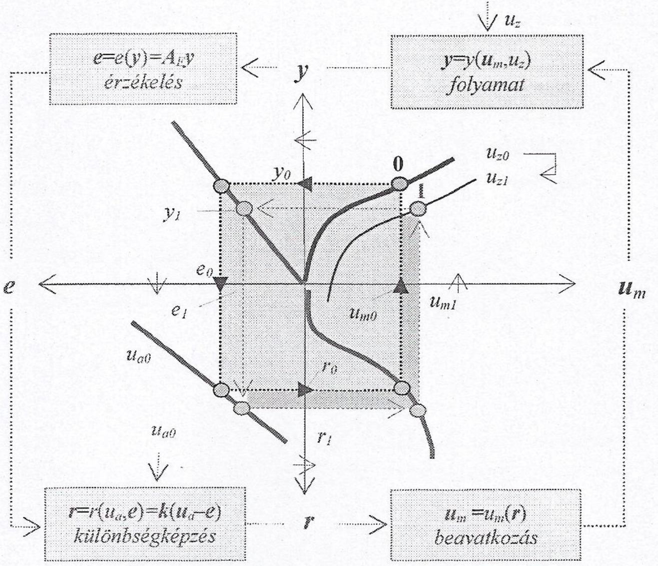
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Egészségügyi mérnök Szak
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Szilágyi Béla –Juhász Ferencné

FOLYAMATSZABÁLYOZÁS

2. A szabályozás

Segédlet 3



cél: zavarelhárítás, követés, értéktartás

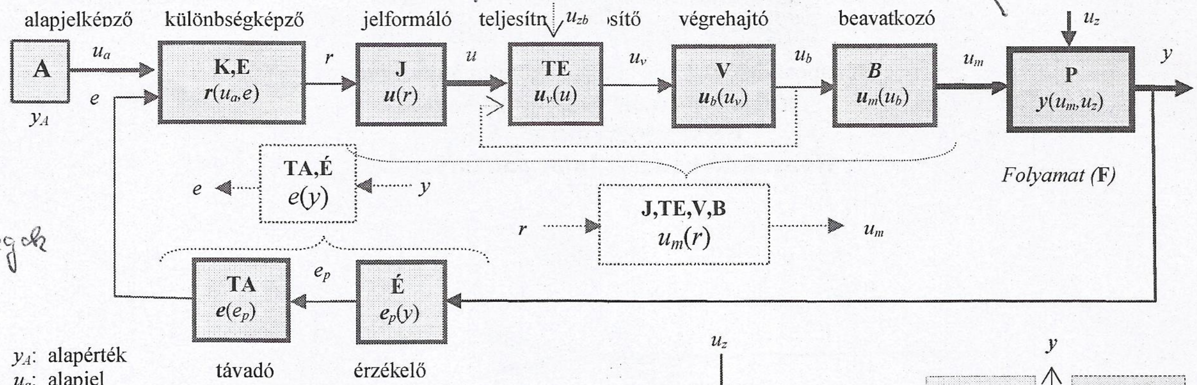
nem lineáris

nem lineáris lehet késleltetés is

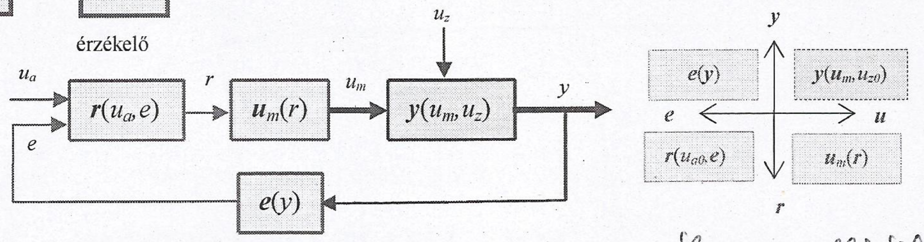
A szabályozás szervei, jelei, hatásvázlata a szervek feltüntetésével, és ennek egyfajta tömörítése

teljesítmény erősítő

dobozok = jelátvivő tagok



y_A: alapérték
u_a: alapjel
e: ellenőrző jel
r: rendelkező jel
u: irányító jel
u_v: végrehajtó jel
u_b: beavatkozó jel
u_m: módosított jellemző
y: szabályozott jellemző
u_z: zavaró jellemző



cél: zavarelhárítás, követés, értéktartás

1. ábra. A hatáslánc sorosan kapcsolt tagjainak egy lehetséges összevonása

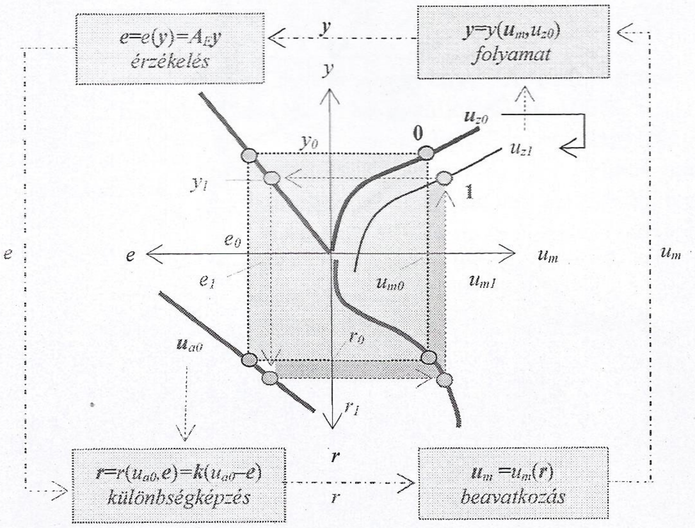
Az 1. ábra mutatja, hogy egyes, egymással soros kapcsolást alkotó tagcsoportok összevonásával négy tagot tartalmazó, tömörített hatásvázlat is előállítható. Rendelkezzen az itt szereplő tagok mindegyike *önbeálló* tulajdonsággal, amikor is mindegyiknek tagnak létezik a *kimenőjel–bemenőjel állandósult értékei között értelmezhető függvénykapcsolat* és az ezt *grafikonon szemléltető* **statikus jelleggörbe**. Vagyis (lásd 2. ábra):

lineáris algebrai rendszer megoldása ⇒ Cramer-szabály

nem-lineáris egyenlet-rendszer

$$\begin{cases} y = y(u_m, u_{z0}) & \rightarrow \text{folyamat} \\ u_m = u_m(r) & \rightarrow \text{beavatkozás} \\ r = r(u_{a0}, e) = k(u_{a0} - e) & \rightarrow \text{különbségképzés (szabályozási algoritmus)} \\ e = e(y) = A_E y & \rightarrow \text{érzékelés} \end{cases}$$

egyensúlyi négyszög, melyen átmegy a rendszer statikus karakterisztikája



2. ábra. Az arányos szabályozási rendszer összevont szerveinek *statikus karakterisztikái* és a rendszer egyensúlyi munkapontjai

További összevonások is lehetségesek:

$y = y(u_m, u_{z0})$ ⟶ A *szabályozott folyamatot* leíró **statikus** karakterisztika

$u_m = u_m(u_{a0}, y)$ ⟶ A teljes *szabályozó berendezést* leíró **statikus** karakterisztika

Ha az $y=y(u_m,u_{z0})$ és az $u_m=u_m(u_{a0},y)$ függvénykapcsolatok önbeálló tulajdonságú tagokat jelentenek, akkor van statikus karakterisztikájuk. Lehetséges, hogy a statikus függvények lineáris kapcsolatokat írnak le (k_p, k_z a folyamat–, k_c a szabályozó átviteli tényezői, $k_0=k_c k_p$ a hurokerősítés). Ekkor:

$$y = y(u_m, u_{z0}) = k_p u_m + k_z u_{z0}$$

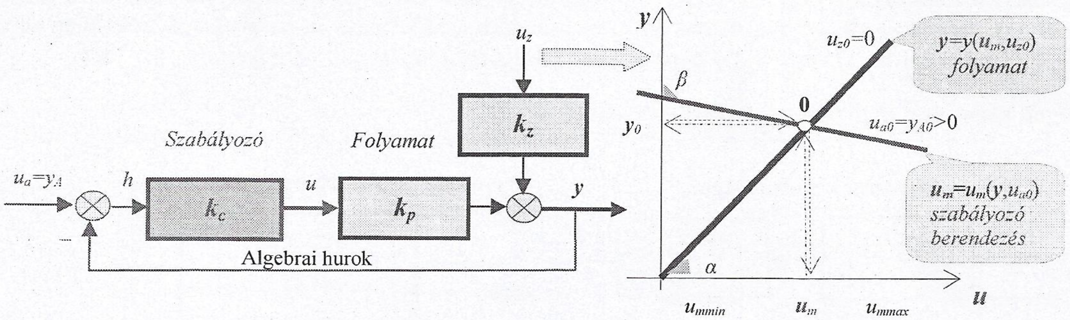
$$u_m = u_m(u_{a0}, e) = k_c(y_{A0} - y)$$

****

$$y = \frac{k_c k_p}{1+k_c k_p} y_{A0} + \frac{k_z}{1+k_c k_p} u_{z0} = \frac{k_0}{1+k_0} y_{A0} + \frac{k_z}{1+k_0} u_{z0} = y_0$$

$$u_m = \frac{k_c}{1+k_c k_p} y_{A0} - \frac{k_c k_z}{1+k_c k_p} u_{z0} = \frac{k_c}{1+k_0} y_{A0} - \frac{k_c k_z}{1+k_0} u_{z0} = u_0$$

Mindezeket a rendszer hatásvázlatán is szemléltetve:

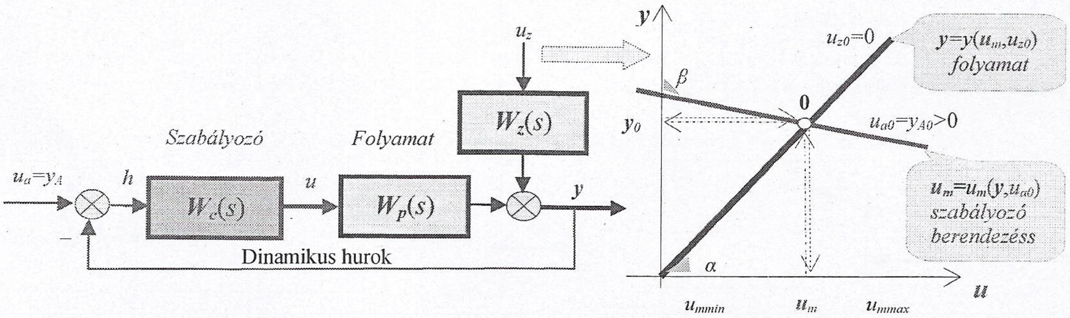


3. ábra

Ha a dinamikus tulajdonságokat is figyelembe akarjuk venni, és a dinamikus tagok továbbra is *önbeállóak*:

$y(s) = W_p(s)u(s) + W_z(s)u_z(s)$ ⟶ A lineáris, dinamikus **folyamat** matematikai modellje

$u(s) = W_c(s)[y_A(s) - y(s)]$ ⟶ A lineáris, dinamikus **szabályozó** matematikai modellje



4. ábra

$W_c(s)$: a *dinamikus*, önbeálló szabályozó átviteli függvénye, $W_p(s)$, $W_z(s)$ a *dinamikus*, önbeálló folyamat $u(s)$ irányítójelre és $u_z(s)$ zavarójelre vonatkozó átviteli függvényei. Ezek ismeretében:

$$y(s) = \underbrace{\frac{W_0(s)}{1+W_0(s)}}_{W_R(s)} y_A(s) + \frac{W_z(s)}{1+W_0(s)} u_z(s)$$

$$u(s) = \frac{W_c(s)}{1+W_0(s)} y_A(s) + \frac{W_z(s)W_c(s)}{1+W_0(s)} u_z(s)$$

Ez a kifejezés mutatja meg, hogy az $y_A(s)$ és $u_z(s)$ bemenőjelek az $y(s)$, $u(s)$ kimenőjeleket miként befolyásolják[1]. A kifejezésben szereplő **$W_0(s)=W_c(s)W_p(s)$ a felnyitott hurok eredő átviteli függvénye.** Az $u_z(t)=0$ zavarójel

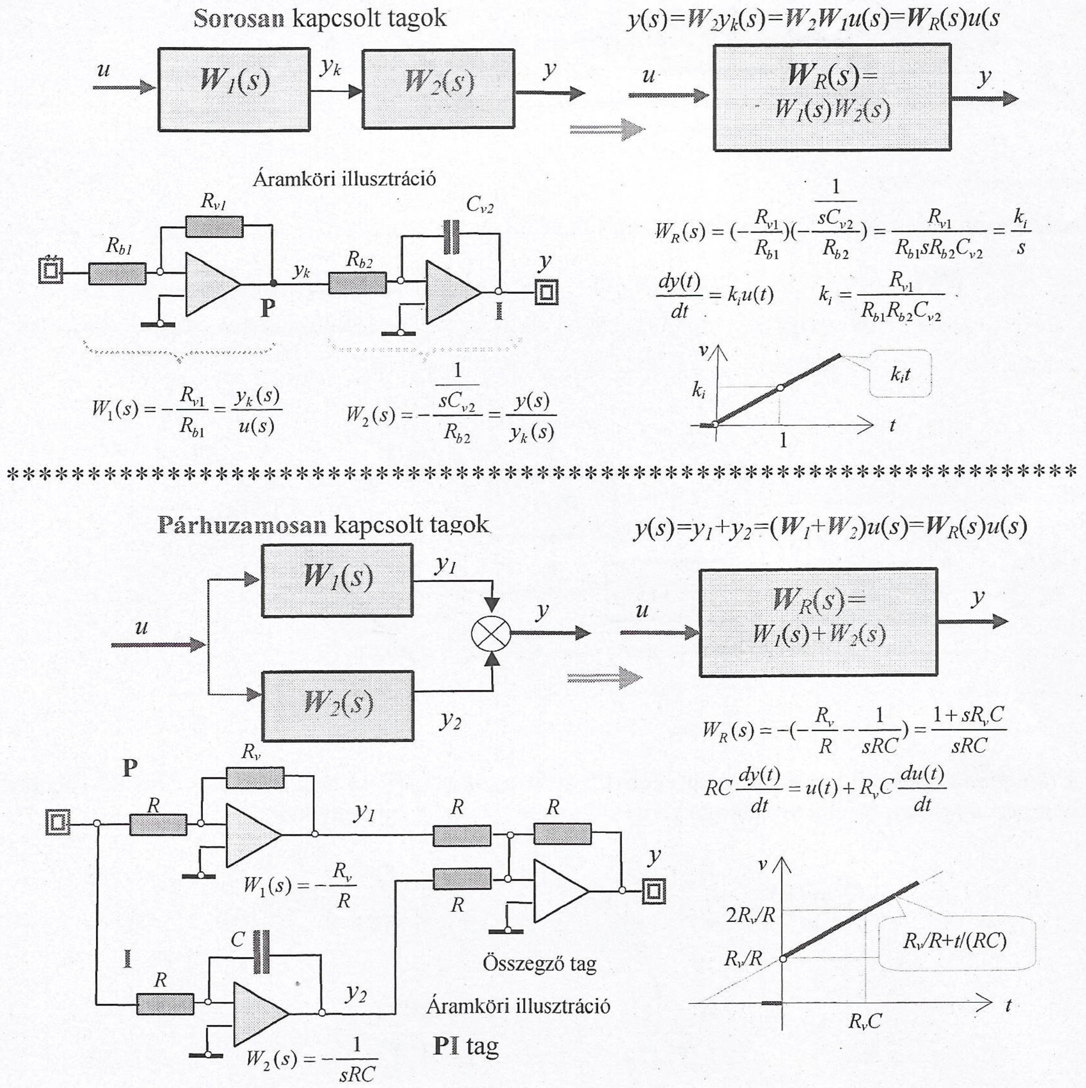
[1] Ezek a képletek egy igen egyszerű függvénykapcsolatot teremtenek az $y(s)$, $u(s)$ kimenőjelek–, és az $y_A(s)$, $u_z(s)$ bemenőjelek *Laplace* transzformáltjai között. Nem szabad azonban megfeledkeznünk arról, hogy az átviteli függvényeknek az időtartományban magas rendszámú **differenciálegyenletek** felelhetnek meg. Az $y(s)$, $u(s)$ ismeretében az $y(t)$, $u(t)$ meghatározása inverz *Laplace* transzformációval történhet: $y(t) = L^{-1}\{W_R(s)y_A(s)\} + L^{-1}\{[W_z(s)/(1+W_0(s))]u_z(s)\}$, $u(t) = L^{-1}\{[W_c(s)/(1+W_0(s))]y_A(s)\} + L^{-1}\{[W_z(s)W_c(s)/(1+W_0(s))]u_z(s)\}$.

(amikor ennek transzformáltja is $u_z(s)=0$) mellett a **zárt** szabályozási rendszer $y_A(s)$ **alapjelre** vonatkozó jelátviteli tulajdonságait az

$$y(s)=\underbrace{\frac{W_0(s)}{1+W_0(s)}}_{W_R(s)}y_A(s)=W_R(s)y_A(s) \quad\rightarrow\quad y(t)=L^{-1}\{W_R(s)y_A(s)\}$$

függvénykapcsolat írja le. $W_R(s)=y(s)/y_A(s)$ a **zárt rendszer** alapértékre vonatkozó **eredő átviteli függvénye**, *pólusai* az $1+W_0(s)=0$ karakterisztikus egyenlet p_{Ri} gyökei. A zárt rendszer **stabilitásának** (a zárt rendszer önbeállóságának[2]) biztosításához ezeknek a p_{Ri} **pólusoknak** *negatív* valós résszel kell rendelkezniük. Miután $W_0(s)=W_c(s)W_p(s)$, ezért az $1+W_0(s)$ gyökeire a $W_c(s)$ megfelelő megválasztásával befolyásunk lehet még abban az esetben is, ha egyébként $W_c(s)$ vagy $W_p(s)$ önmagukban labilis tulajdonsággal rendelkezik.

Jelátvivő tagok soros és párhuzamos alapkapcsolásai (5. ábra)



5. ábra. Jelátvivő tagok *soros* és *párhuzamos* kapcsolásai

Soros–, és **párhuzamos** kapcsolás esetében, ha $W_1(s)$ és $W_2(s)$ stabilis, az eredő is az, de ha $W_1(s)$ és $W_2(s)$ *valamelyike* labilis, az eredő rendszer is **labilis**. A tagok felcserélése mellett az eredő átviteli függvény változatlan marad [$W_1(s)W_2(s)=W_2(s)W_1(s)$, $W_1(s)+W_2(s)=W_2(s)+W_1(s)$].

[2] A zárt rendszer **önbeállósága** alatt azt értjük, hogy a bemenetre kapcsolt $y_{A0}\mathbf{1}(t)$ determinisztikus vizsgálójel hatására egy olyan tranziens folyamat jön létre, amelyben az $y(t)$ kimenőjel $t\rightarrow\infty$ mellett $y(\infty)=y_0\approx y_{A0}=$*állandó* értéket vesz fel. Ez a stabilis, **zárt** szabályozási rendszernek természetes, alapvető tulajdonsága kell, hogy legyen, és ideális esetben $y(t)=y_A(t)$. Ennek jelentése. $y(t)$ tényleges értéke azonos ennek előírt $y_A(t)$ értékével.

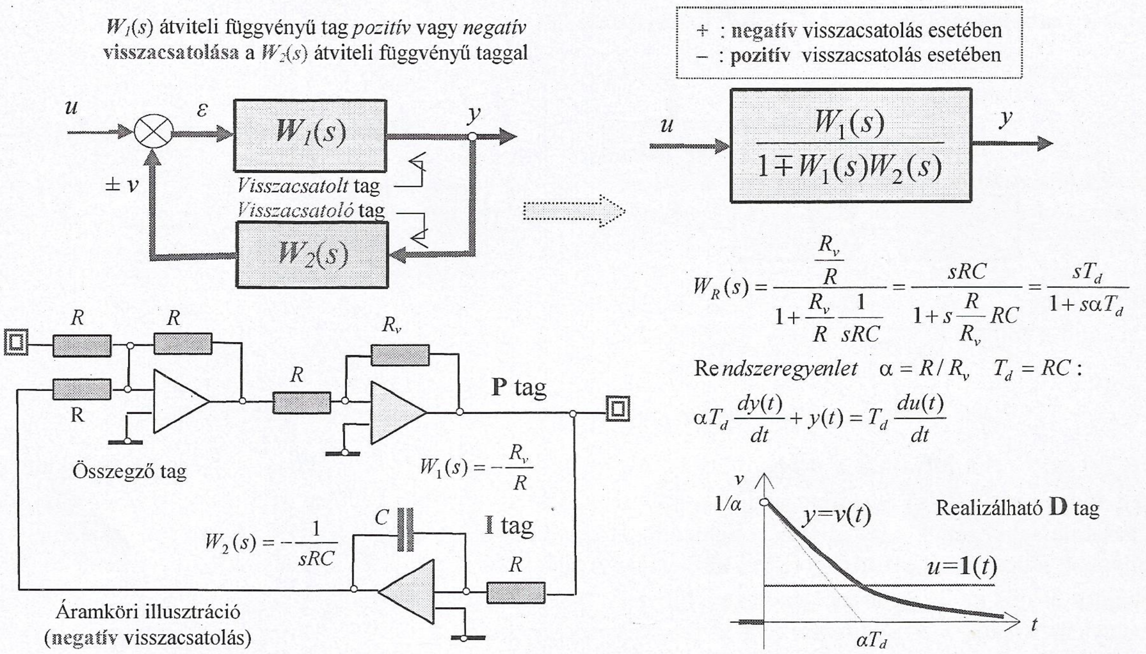
Tagok visszacsatolása (6. ábra)

Alapvetően különbözik a helyzet – a *soros*, illetve a *párhuzamos* kapcsoláshoz képest – a **visszacsatolás** esetében (lásd 5. ábra). Ekkor (a + előjel a negatív–, a – előjel a pozitív visszacsatolásra vonatkozik!):

$$y(s)=\frac{W_1(s)}{1\mp W_1(s)W_2(s)}u(s)=W_R(s)u(s)$$

$$W_R(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{W_1(s)}{1\mp W_1(s)W_2(s)}=\frac{1}{W_2(s)}\frac{W_0(s)}{1\mp W_0(s)}$$

$W_0(s)=W_1(s)W_2(s)$ a **nyitott** hurok–, $W_R(s)$ a **zárt** rendszer *eredő* átviteli függvényei. Maga a *szabályozás a **negatív visszacsatolás** elvén megvalósuló irányítás*. A visszacsatolt struktúrában az eredő jelátviteli tulajdonság $W_1(s)$ és $W_2(s)$ felcserélésével – $W_1(s)\neq W_2(s)$ esetében – *alapvetően* megváltozik.



6. ábra. Jelátvivő tag *visszacsatolása* és áramköri illusztrációja

A visszacsatolás fontos jellemzője, a ***zárt hurokban terjedő jelek hatásmechanizmusa*** ($u\to\varepsilon\to y\to\pm v\to\varepsilon$). Ennek több **előnyös**, de egy **hátrányos**[3] tulajdonsága is van. Ha a visszacsatolás struktúrájában szerepet játszó mindkét tag *időkésés nélküli arányos* kapcsolatot fejez ki a közvetlen bemenetük–, és kimenetük között[4], vagyis: $y(t)=k_1\varepsilon(t)$ és $v(t)=k_2y(t)$. Ekkor $W_1(s)=k_1>0$, $W_2(s)=k_2>0$ állandók, és a visszacsatolás un. **algebrai hurkot** alkot. Az eredő átviteli függvény ekkor:

$$W_R(s)=\frac{k_1}{1\mp k_1k_2}=\frac{1}{k_2}\frac{k_0}{1\mp k_0}\qquad k_0=k_1k_2>0$$

ahol k_0 a visszacsatolás *hurokerősítése*. **Pozitív** visszacsatolás mellett (a képletben ekkor a – előjel érvényes) és $k_0=1$ esetében $1-k_0=0$, és ezért ekkor $W_R(s)=1/0=\infty$, ami az ilyen körülmények tarthatatlanságára utal.

Fontos: **a zárt szabályozási rendszer kizárólag negatív** (önkiegyenlítő) **visszacsatolásban, és a stabilitási követelményeket kielégítve működhet**. Ez nem zárja ki azt, hogy a hatásláncon belül

---

[3] A visszacsatolás hátrányos tulajdonsága a **labilitásra** (gerjedésre) **való hajlama**, ami különösen a **pozitív** visszacsatolás esetében állhat elő. Mindez a zárt hatásláncban megvalósuló *jelterjedési* viszonyok késleltetésének a következménye.

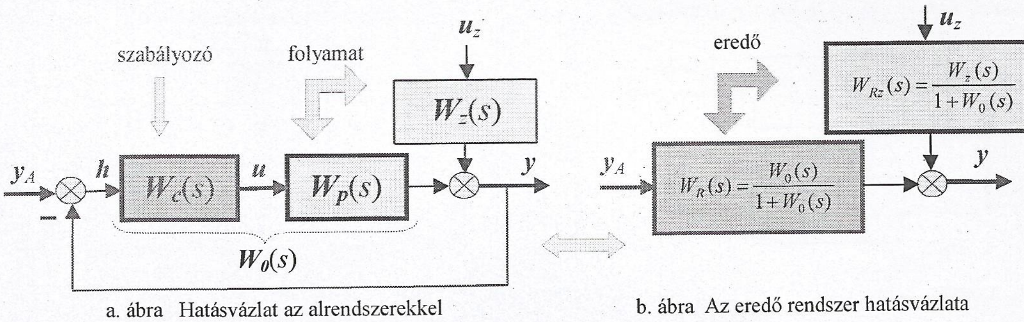
[4] Ez egy idealizált jelátviteli tulajdonság, a valóságos fizikai rendszerekben a kisebb–nagyobb jelkésleltetés általában mindig jelen van.

labilis tagok, vagy pozitívan visszacsatolt belső, alárendelt részhurkok ne lehessenek. A **MATLAB** az alábbi utasításokkal számítja az alapkapcsolások $W_R(s)$ eredő átviteli függvényeit:

```
G1=input('G1='); H1=input('H1=');  % W1 adatbevitele
G2=input('G2='); H2=input('H2=');  % W2 adatbevitele
[GR,HR]=series(G1,H1,G2,H2);       % soros kapcsolás,           WR=W1W2
[GRp,HRp]=parallel(G1,H1,G2,H2);   % párhuzamos kapcsolás,      WRp=W1+W2
[GRv,HRv]=feedback(G1,H1,G2,H2,-1);% negatív visszacsatolás,    WRv=W1/(1+W1W2)
[GRv,HRv]=feedback(G1,H1,G2,H2,1); % pozitív visszacsatolás,    WRv=W1/(1-W1W2)
[GR,HR]=cloop(G1,H1);      % W1 merev, negatív visszacsatolása, WR=W1/(1+W1)
```

Nyomatékosan rögzítsük: ha a **visszacsatolást** tartalmazó alapkapcsolásban mindkét tag aszimptotikusan **stabilis**, az eredő rendszer ettől függetlenül **labilis is** lehet. És megfordítva, ha a visszacsatolást tartalmazó alapkacsolásban valamelyik tag **labilis**, az eredő rendszer ettől függetlenül aszimptotikusan **stabilis is** lehet.

A lineáris szabályozás (*Feedback Control*) hatásvázlata



a. ábra Hatásvázlat az alrendszerekkel

b. ábra Az eredő rendszer hatásvázlata

7. ábra. A soros kompenzációs, **negatív visszacsatolású**, lineáris szabályozási rendszer hatásvázlata

$W_p(s)$ és $W_z(s)$ a **folyamat** *u irányító jelre*–, illetve az *u_z zavaró jelre* vonatkozó – és ismertnek tekintett – átviteli függvényei. $W_c(s)$ a méretezendő **szabályozó** átviteli függvénye[5]. Jelen esetben az y jelet közvetlen visszacsatolással vezetjük a szabályozó h bemenőjelét előállító különbségképző tagra, így most az u_a alapjel az y szabályozott jellemző kívánt értékét (az y_A **alapértéket**) jeleníti meg: $u_a = y_A$. A szabályozó $h = y_A - y$ bemenőjele (a h hibajel) ekkor ez a rendszer tényleges hibája[6]. Az s *Laplace* operátor tartományban a jelek közötti függvénykapcsolatok – *az általában magas rendszámú differenciálegyenletek helyett* – igen egyszerű algebrai kifejezésekkel adhatók meg. Ezek a szabályozás – s operátor tartományban értelmezett – **rendszeregyenletei**, nevezetesen:

$$
\boxed{\begin{aligned}
y(s) &= W_p(s)u(s) + W_z(s)u_z(s)\\
u(s) &= W_c(s)h(s)\\
h(s) &= y_A(s) - y(s)
\end{aligned}}
$$

Az y szabályozott jellemző mellett kimenőjelnek felvehetjük az u irányító jelet és a h hibajelet is (ezek a hatáslánc *belső* jelei, lásd 7. ábra)). Ekkor az előző rendszeregyenletek egyenletek alapján:

---

[5] Egy lehetséges felosztásban $W_p(s)$ a sorosan kapcsolt *teljesítmény erősítő*, a *végrehajtó szerv*, a *beavatkozó szerv*, a *szabályozott szakasz* és az *érzékelő szerv*, együttes tulajdonságait –, $W_c(s)$ pedig a szintén soros kapcsolást alkotó, *előerősítő, és a kompenzáló* szerv eredő tulajdonságait írja le. A szabályozási algoritmust rendszerint a **kompenzáló (jelformáló) szerv** realizálja. A rendszertechnikai méretezés általában a kompenzáló szerv *statikus* és *dinamikus* tulajdonságainak meghatározására irányul.

[6] Ez a felfogás annak is megfelelhet, mintha az érzékelő szerv kimenő jelét tekintenénk a rendszer szabályozott jellemzőjének. A jó minőségű érzékelő szerv egy pontos „műszer”, kimenő jele a szabályozott jellemzővel szigorúan arányos ($e = A_E y$), és jelkésleltetése általában elhanyagolható.

$$y(s)=\frac{W_0}{1+W_0}y_A(s)+\frac{W_z}{1+W_0}u_z(s)=\frac{W_0}{1+W_0}\left(y_A(s)\quad+\frac{W_z}{W_0}u_z(s)\right)$$

$$u(s)=\frac{W_c}{1+W_0}y_A(s)-\frac{W_zW_c}{1+W_0}u_z(s)=\frac{W_0}{1+W_0}\left(\frac{1}{W_p}y_A(s)-\frac{W_z}{W_p}u_z(s)\right)$$

$$h(s)=\frac{1}{1+W_0}y_A(s)-\frac{W_z}{1+W_0}u_z(s)=\frac{W_0}{1+W_0}\left(\frac{1}{W_0}y_A(s)-\frac{W_z}{W_0}u_z(s)\right)$$

A zárt, lineáris rendszerben a $\Delta u_z(s)$ zavarójel $\Delta y(s)$ szabályozott jellemző változást okoz. Ennek mértéke:

$$\Delta y=\frac{W_z(s)}{1+W_0(s)}\Delta u_z(s)=\frac{(\Delta y)_\mathrm{n}}{1+W_0(s)}$$

A $(\Delta y)_\mathrm{n}=W_z(s)\Delta u_z(s)$ az y szabályozott jellemzőben $\Delta u_z(s)$ hatására keletkező megváltozás, *szabályozás nélkül.*

A zárt szabályozási rendszer gyökhelygörbéje

A szabályozással szemben támasztott ***elsődleges követelmény a zárt rendszer aszimptotikus stabilitásának*** (önbeállóságának) ***biztosítása***. A stabilitás a rendszer paramétereitől–, ezen belül is elsősorban a **körerősítéstől** függ. A körerősítés változásának hatása a rendszer dinamikájára, és a stabilitására szemléletesen érzékeltethető a zárt szabályozási rendszer **gyökhelygörbéjén**. A stabilitás általános feltétele hogy a zárt rendszer $1+\boldsymbol{W}_0(s)=1+G_0(s)/H_0(s)=0$, illetve $H_0(s)+G_0(s)=0$ karakterisztikus egyenletének minden p_{Ri} gyöke (a $\boldsymbol{W}_R(s)$ átviteli függvény minden p_{Ri} pólusa) ***negatív valós*** résszel rendelkezzen. Aszimptotikusan stabilis a lineáris, zárt szabályozási rendszer, ha a $\boldsymbol{W}_0(s)=G_0(s)/H_0(s)$ **nyitott köri** átviteli függvényből képzett

$$\boldsymbol{H}_R(s)=H_0(s)+G_0(s)=\boldsymbol{H}_c(s)\boldsymbol{H}_p(s)+\boldsymbol{G}_c(s)\boldsymbol{G}_p(s)=0$$

karakterisztikus egyenlet p_{Ri} *gyökei* a komplex számsík negatív valós részű félsíkján (a *stabilis félsíkon*) helyezkednek el (lásd pl. a $W_R(s)$ átviteli függvény párhuzamos felbontását). A rendszer $\boldsymbol{W}_0(s)=\boldsymbol{W}_c(s)\boldsymbol{W}_p(s)$ nyitott köri átviteli függvényének algebrai törttel–, illetve gyöktényezőkkel megadható normálalakjai:

$$W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=\frac{G_c(s)}{H_c(s)}\frac{G_p(s)}{H_p(s)}=\frac{G_0(s)}{H_0(s)}==\frac{g_0s^m+g_1s^{m-1}+\cdots+g_{m-1}s+g_m}{h_0s^n+h_1s^{n-1}+\cdots+h_{n-1}s+h_n}=\frac{g_0}{h_0}\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Ahol $g_0/h_0=k_0$ a nyitott kör átviteli függvényének **huroktényezője**, z_i a $W_0(s)$ zérusai ($W_0(z_i)=0$), $\boldsymbol{p}_i$ $W_0(s)$ pólusai ($W_0(\boldsymbol{p}_i)=\infty$), és $n\geq m$. A zárt rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$H_R(s)=H_0(s)+G_0(s)=(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)+k_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)=0$$

$$H_R(s)=(s-p_{R1})\cdots(s-p_{Ri})\cdots(s-p_{Rn})=0$$

Lényegét tekintve a **nyitott** hurok adott p_i és z_i adatai mellett a **zárt** hurok karakterisztikus egyenletének p_{Ri} gyökeit keressük, miközben a k_0 tényező befutja a $0<k_0<\infty$ intervallumot. $k_0=0$ esetében $p_{Ri}=p_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, illetve $k_0=\infty$ esetén $p_{Ri}=z_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$, $abs(p_{Ri})=\infty$ $(i=m+1,m+2,\ldots,n)$. Ha tehát a k_0 huroktényező befutja a $0<k_0<\infty$ intervallumot, a **zárt** rendszer p_{Ri} pólusai a **nyitott** kör $\boldsymbol{p}_i$ pólusaiból *kiindulva*, m águkon át a **nyitott** kör z_i zérusaiba, illetve a maradék $n-m$ águkon keresztül a **végtelenbe** tartanak. A rendszer p_{Ri} pólusainak ez a „vándorlása" az $s=\sigma+j\omega$ változó komplex síkján a zárt rendszer **gyökhelygörbéje** (*root–locus plot*). *Evans*[7] dolgozta ki a gyökhelygörbe szerkesztési szabályait. A MATLAB `rlocus(G0,H0)` függvénye a gyökhelygörbe komplex síkon történő ábrázolását – a p_{Ri} gyököknek a különféle k_0 értékek melletti kiszámításával – hatékonyan támogatja. Néhány egyszerűbb tulajdonság:

- *A gyökhelygörbe* ***szimmetrikus*** *a komplex sík valós tengelyére.*
- *A gyökhelygörbének n* ***ága van,*** *ahol n a* ***nyitott*** *kör* $\boldsymbol{p}_i$ *pólusainak száma.*
- *A gyökhelygörbe ágai* ***a nyitott kör*** $\boldsymbol{p}_i$ ***pólusaiból indulnak.***

[7] *W. R. Evans*: **Control–system Dinamics.** McGraw–Hill Book Company.

- *Az n számú ágból (miközben $0<k_0<\infty$) m számú ág **a nyitott kör z_i zérusaiba–**, és n–m számú ág a **végtelenbe tart**. n a $H_R(s)=G_0(s)+H_0(s)$ polinom fokszáma.*
- *A $k_0=g_0/h_0$ hurokténvezőnek az az értéke, amelynél a gyökhelygörbe metszi az imaginárius tengelyt, a k_{0krt} **kritikus hurokténvező**. Ekkor valamelyik p_{Ri} pólus, vagy póluspár **valós része zérus**, ami miatt a rendszer a stabilitás határhelyzetében van. Az ilyen szabályozási rendszer **feltételesen** (a k_0 hurokténvezőtől függően) **stabilis**.*
- *A valós tengelynek egy adott szakasza a gyökhelygörbe valamelyik ágának is része, ha e szakasztól **jobbra lévő p_i** pólusok, és z_i zérusok **összegének** darabszáma **páratlan**.*
- *Ha n=m (vagyis $W_0(s)$ számlálójának m fokszáma azonos a nevezőjének n fokszámával), akkor a gyökhelygörbe minden ága a zérusokba fut be, vagyis a gyökhelygörbe a **végesben marad**.*
- *Ha a gyökhelygörbe **minden ága** az s sík **negatív valós** részű síkfelén marad, miközben a hurokténvező befutja a $0<k_0<\infty$ intervallumot, akkor a zárt rendszer **aszimptotikusan, és strukturálisan stabilis**.*
- *stb...*

Példa

Legyen $W_0(s)$ jellemezve az alábbi zérusokkal és pólusokkal: $z_{1,2}=1\pm j$, $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=-2$. A k_0 hurokténvező befutja a $0<k_0<\infty$ intervallumot (a $W_0(s)$ átviteli függvény $p_1=0$ pólusa miatt a nyitott kör **labilis**). A nyitott kör zérus–pólus adatai alapján:

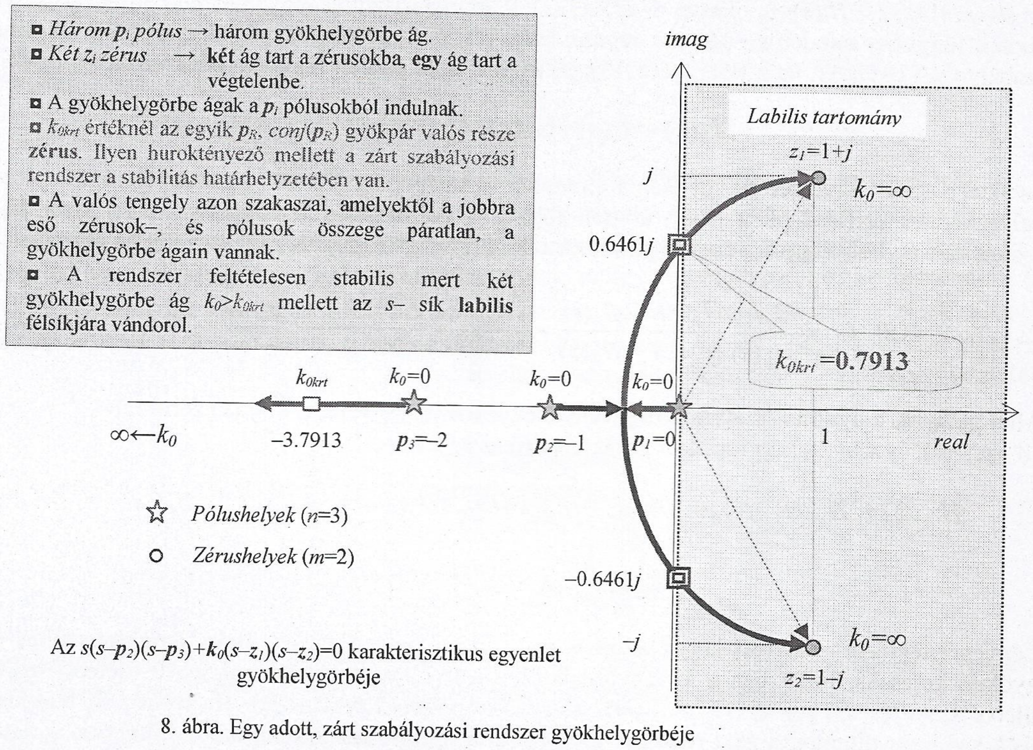
$$W_0(s)=\frac{G_0(s)}{H_0(s)}=k_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{s(s-p_2)(s-p_3)}=k_0\frac{(s-1+j)(s-1-j)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$1+W_0(s)=0\quad\Rightarrow H_0(s)+G_0(s)=0$$

$$s(s-p_2)(s-p_3)+k_0(s-z_1)(s-z_2)\;=0$$

$$s(s+1)(s+2)+k_0(s-1-j)(s-1+j)\;=0$$

A $W_0(s)$ kifejezéséből láthatóan a **nyitott** hurok átviteli függvényének pólusa van a komplex sík origójában, aminek jelentése szerint $W_0(s)$ integráló tulajdonsággal rendelkezik, vagyis gyakorlati szempontból ***labilis***. A **zárt** rendszer $W_R(s)=W_0(s)/[1+W_0(s)]$ eredő átviteli függvényének a nyitott kör *labilis* tulajdonságának ellenére asziptotikusan stabilisnak kell lennie. A zárt rendszer p_{Ri} pólusainak vándorlása a komplex síkon, miközben a k_0 paraméter a $0<k_0<\infty$ intervallumot befutja a rendszer gyökhelygörbéje.



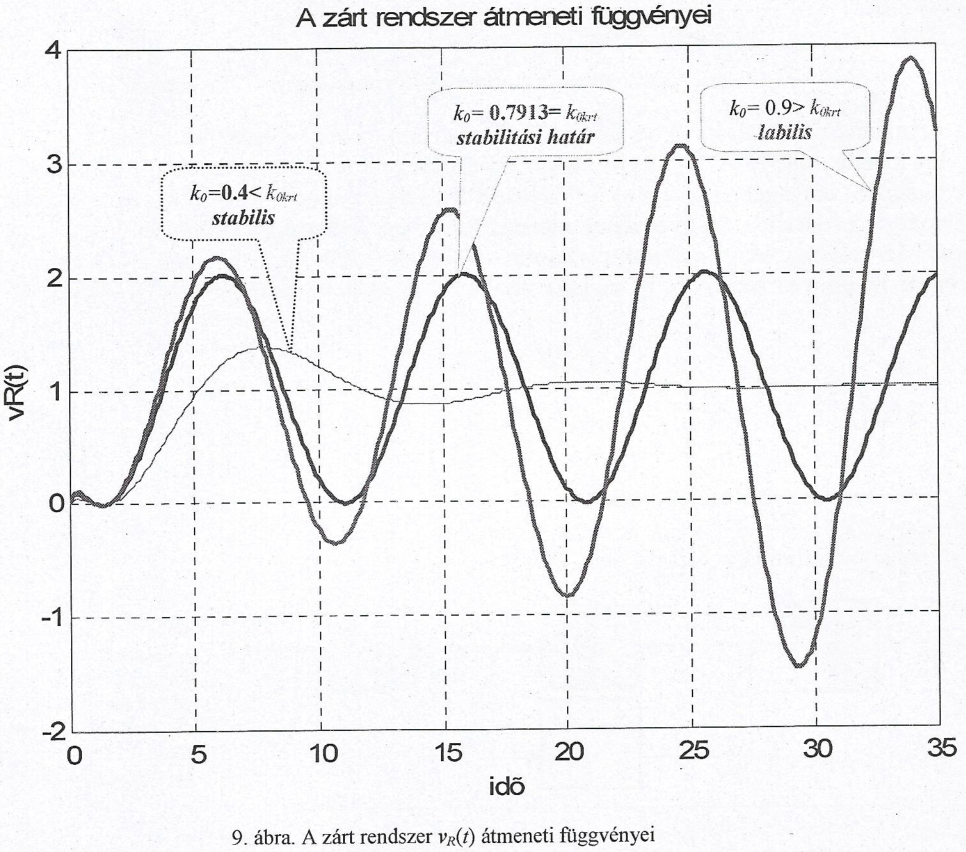
8. ábra. Egy adott, zárt szabályozási rendszer gyökhelygörbéje

MATLAB támogatással számíthatjuk a gyökhelygörbét, valamint a zárt szabályozási rendszer eredő átmeneti függvényeit, a k_0 hurokténvező különböző értékeire. A **MATLAB** program:

```
echo on;clear;clf;
Go=conv([1 -1+j],[1 -1-j]);Ho=conv([1 0],conv([1 1],[1 2]));
rlocus(Go,Ho);grid on;title('A gyökhelygörbe');pause;
rlocfind(Go,Ho);% kokrt=0.7913
t=0:.1:35;
ko=0.7913;Go=ko*conv([1 -1+j],[1 -1-j]);
[GRk,HRk]=cloop(Go,Ho);y1=step(GRk,HRk,t);
pR1=roots(n);disp(p1);pause;
ko=0.4;Go=ko*conv([1 -1+j],[1 -1-j]);
[GRS,HRS]=cloop(Go,Ho);y2=step(GRS,HRS,t);
pR2=roots(n);disp(p2);pause;
```

```
ko=0.9;Go=ko*conv([1 -1+j],[1 -1-j]);
[GRL,HRL]=cloop(Go,Ho);y3=step(m,n,t);
pR3=roots(n);disp(p3);pause;
plot(t,y1,t,y2,t,y3);grid on;
title(' A zárt rendszer átmeneti függvényei');
xlabel('idő');ylabel('vR(t)');pause;
```

A programmal kapott eredményekből a **zárt** rendszer $v_R(t)$ átmeneti függvényét (az egységugrás alapértékre adott válaszát) adjuk meg olyan esetekre, amikor a huroktényező k_0= **0.7913** = k_{0krt} (a stabilitás határa), k_0=**0.4** < k_{0krt} (stabilis rendszer) és k_0=**0.9** > k_{0krt} (labilis rendszer). Figyeljük meg, hogy $k_0>k_{0krt}$ huroktényező mellett a zárt szabályozási rendszer **labilis**, ekkor az $y_A(t)$=**1**(t) alapjel mellett az y szabályozott jellemző olyan lengésképet mutat, melynek amplitúdói $t\to\infty$ mellett minden határon túlmenően növekszenek !!! Az is lényeges tulajdonsága az adott szabályozási rendszernek, hogy a **nyitott** kör gyakorlati szempontból labilis (integráló tulajdonságú), a **zárt** kör a huroktényező $0<k_0<k_{0krt}$ értékei mellett stabilis, de a k_0 növelésével labilissá válhat.



9. ábra. A zárt rendszer $v_R(t)$ átmeneti függvényei

Holtidőt is tartalmazó nyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvényének $exp(-sT_h)$ transzcendens tényezőjét algebrai törttel lehet közelíteni (*Strejc* vagy *Pade* polinomok):

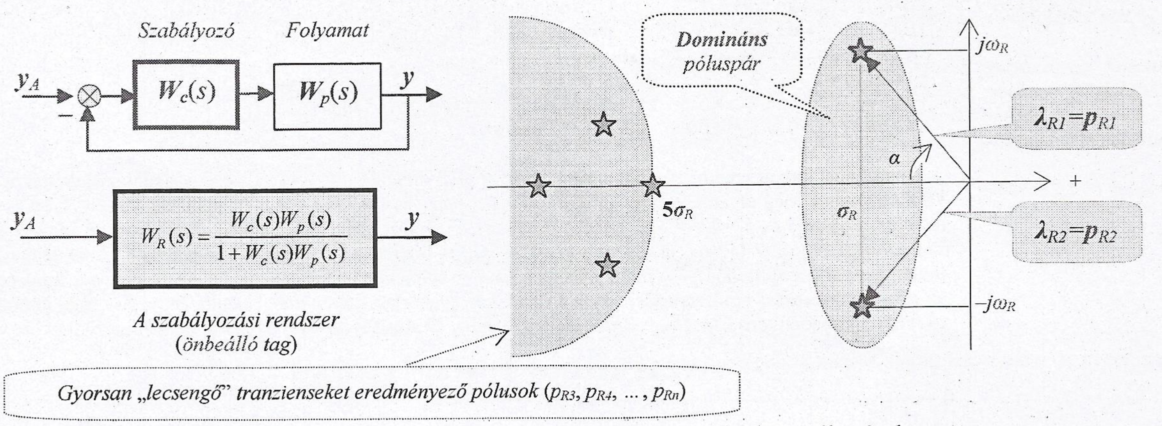
$$e^{-sT_h} \cong \lim_{k\to\infty}(1+\frac{sT_h}{\mathrm{N}})^{-\mathrm{N}} \cong \frac{1}{(1+s\frac{T_h}{\mathrm{N}})^{\mathrm{N}}} \quad \mathrm{N}:6,7,8\ldots$$

$$e^{-sT_h} \cong \frac{120-60sT_h+12(sT_h)^2-(sT_h)^3}{120+60sT_h+12(sT_h)^2+(sT_h)^3}$$

Fontos: a szabályozási rendszer **labilitása** a k_0 paraméter azon $k_0=k_{0krt}$ értéke mellett következik be, amikor a dinamikus rendszer gyökhelygörbéje a komplex sík pozitív valós részű félsíkjára „megy át" (lásd 8. ábra). Labilis nyitott kör viszont úgy stabilizálható, hogy a gyökhelygörbét a labilis félsíkról a stabilis félsíkra „vezetjük át".

Másodrendű zárt szabályozási rendszer. A domináns póluspár

A szabályozási rendszer tervezésének egyik lehetséges célkitűzése, hogy a *zárt* rendszer p_{Ri} pólusai között legyen egy $p_{R1,2}=\sigma_R\pm j\omega_R$ un. **domináns póluspár**, és a többi p_{R3}, p_{R4},..., p_{Rn} pólus valós része a domináns póluspár $\sigma_R<0$ valós részétől legyen lényegesen kisebb (lásd a 10. ábrát). A stabilitás biztosításához természetesen minden p_{Rj} pólusnak a komplex számsík stabilis félsikján kell elhelyezkednie.



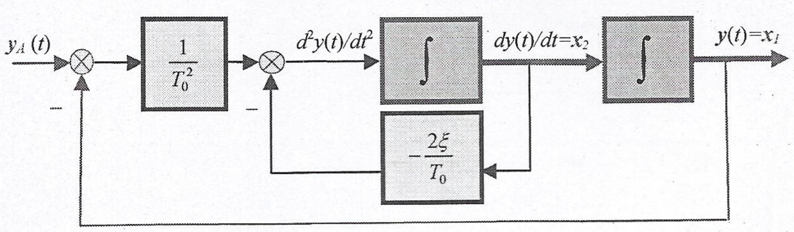
10. ábra. A zárt szabályozási rendszer és jellemzése egy domináns póluspárral

Ha a domináns póluspár $\sigma_R<0$ **valós** része akkora, hogy ehhez képest az összes többi pólus **valós** része $(3{\sim}5)\sigma_R$–től **kisebb** ($|(3{\sim}5)\sigma_R|>|\sigma_R|$), akkor az ezekhez tartozó tranziensek igen gyorsan „eltűnnek”, és a rendszer mozgását lényegében a negatív valós részű domináns pólupár, $\sigma_R<0$ és ω_R paraméterei határozzák meg. A szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényének méretezésekor egy lehetséges célkitűzés lehet, hogy a zárt rendszer $W_R(s)$ eredő átviteli függvénye *domináns póluspárral* rendelkezzen. Az y_A bemenőjelű, y kimenőjelű szabályozás **másodrendű lengő rendszerrel (T$_\xi$** taggal) írható le, és differenciálegyenlete, valamint átviteli függvénye ekkor:

$$T_0^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\xi T_0\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=y_A(t)$$

$$W_R(s)=\frac{y(s)}{y_A(s)}=\frac{1}{1+2\xi T_0 s+T_0^2 s^2}=\frac{G_R(s)}{H_R(s)}$$

Ebben $T_0>0$ **a zárt rendszer csillapítatlan sajátkörfrekvenciájának reciproka** ($\omega_0=1/T_0$), $0<\xi\leq 1$ **a csillapítási tényező**[8] ($\sigma_R=-\xi/T_0$, $\omega_R=\sqrt{(1-\xi)}/T_0$). A differenciálegyenlethez, vagy a $W_R(s)$ átviteli függvényhez rendelhető, lineáris alaptagokat tartalmazó hatásvázlat:



$\xi=0$ csillapítási tényező mellett a hatásvázlat két, egymással *soros* kapcsolást alkotó, eredőben *negatívan* visszacsatolt, integráló tagot tartalmazó struktúrát alkotna. Ekkor a rendszer ugrásválasza **csillapítatlan** lengőmozgás.

11. ábra. Másodrendű rendszer lineáris rendszerrel közelített szabályozás alaptagokból felépülő hatásvázlata

A zárt rendszer $v_R(t)$ átmeneti függvénye (egységugrás válasza):

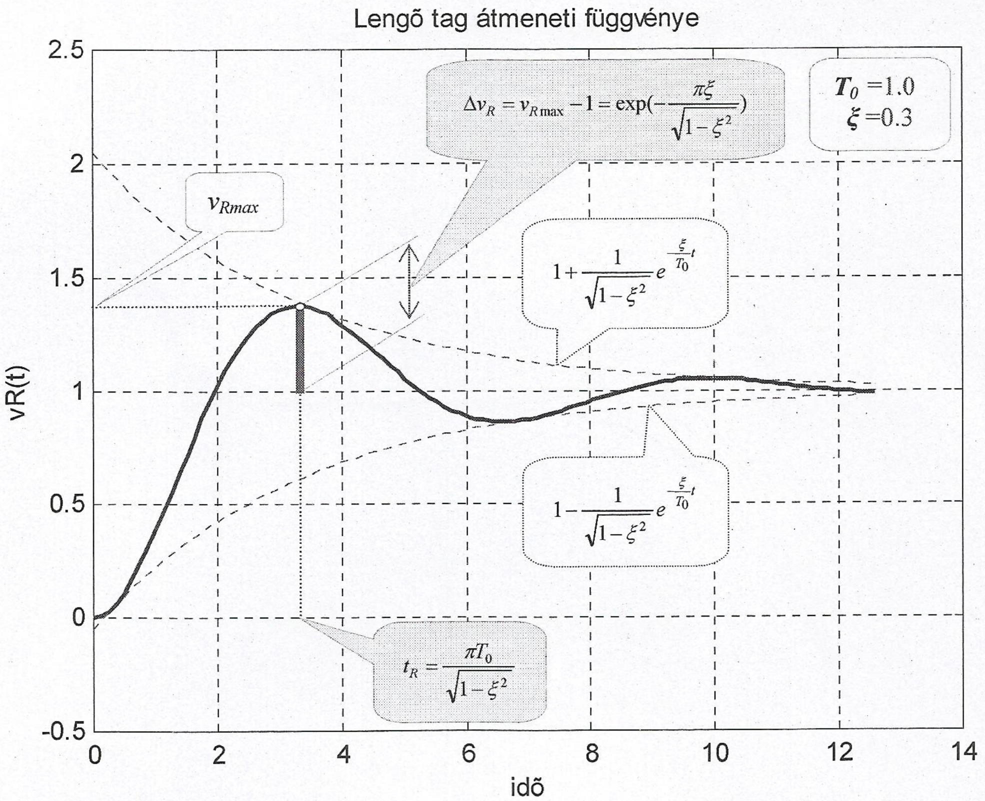
$$v_R(t)=L^{-1}\left\{W_R(s)\frac{1}{s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{1+2\xi T_0 s+T_0^2 s^2}\frac{1}{s}\right\}=$$

$$=\begin{cases}1-(1+\dfrac{t}{T_0})e^{-\frac{t}{T_0}} & \xi=1\\[2ex] 1-\dfrac{e^{-\frac{\xi}{T_0}t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left[\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0}t-arctg\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right] & 0<\xi<1\end{cases}$$

A $v_R(t)$ átmeneti függvény grafikonja:

---

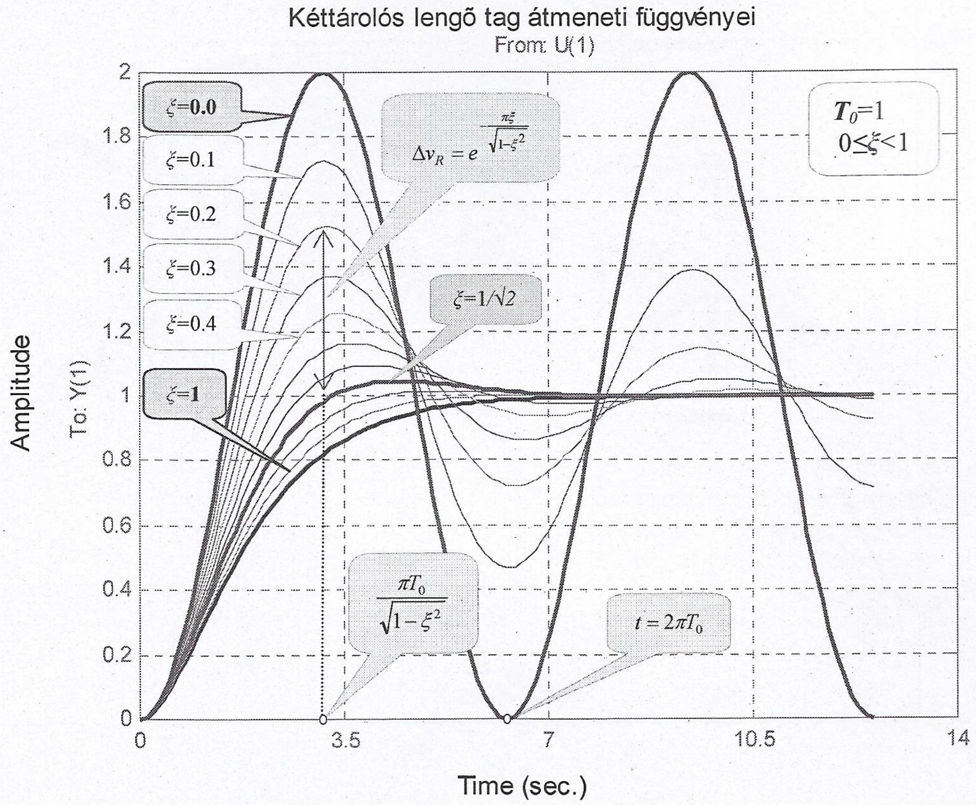
[8] Ha a T$_\xi$ kéttárolós lengő tag csillapítási tényezője $\xi>1$ lenne, akkor ennek $v_R(t)$ átmeneti függvénye monoton növekedve, aperiodikus beállással venné fel a $v_R(\infty)=\mathbf{1}$ végértékét. A $\xi<0$ mellett a tag **labilis**, az átmeneti függvénye egyre növekvő amplitúdójú lengésekkel a $\pm\infty$–hez tartana, ami nyilvánvalóan **nem** megengedett.



12. ábra. Másodrendű lengő rendszer (T_ξ tag) $v_R(t)$ átmeneti függvénye

Az átmeneti függvény időlefolyása a ξ **csillapítási tényező** különböző értékekre **MATLAB** támogatással számítható:

```
echo on;clear;clf;
% lengő tag átmeneti függvényénk számítása
T0=input('T0=');kszi=input('kszi=');t=0:4*pi*T0/100:4*pi*T0;
[A,B,C,D]=tf2ss(1,[T0*T0 2*kszi*T0 1]);sys=ss(A,B,C,D);
grid on;step(sys,t);title('Lengő tag átmeneti függvénye');
ylabel('vR(t)');xlabel('idő');pause;clf;
for k=0:10
T0=1;kszi=1;
grid on;
[A,B,C,D]=tf2ss(1,[T0*T0 2*kszi*T0*k/10 1]);
sys=ss(A,B,C,D);
step(sys,t);hold on;pause;
end
title('Lengő tag átmeneti függvénye');
ylabel('vR(t)');xlabel('idő');pause;clf;
T0=input('T0=');kszi=input('kszi=');t=0:4*pi*T0/100:4*pi*T0;
[A,B,C,D]=tf2ss(1,[T0*T0 2*kszi*T0 1]);sys=ss(A,B,C,D);
vR=step(sys,t);
vf=1+(1/sqrt(1-kszi^2))*exp(-(kszi/T0)*t);
vl=1-(1/sqrt(1-kszi^2))*exp(-(kszi/T0)*t);
plot(t,vR,t,vf,t,vl);grid on;
title('Lengő tag átmeneti függvénye');
ylabel('vR(t)');xlabel('idő');pause;pause;clf;
keyboard; % visszatérés: return
```



13. ábra. Kéttárolós lengő tag $v_R(t)$ átmeneti függvényei ξ csillapítási tényező különféle értékekre

A $v_R(t)$ kifejezését tanulmányozva jól látható, hogy a ξ csillapítási tényezőnek a lengésképre alapvető befolyása van. Figyelemre érdemes tulajdonság, hogy a $v_R(t)$ átmeneti függvény

$$\boxed{\Delta v_R = v_{R\max} - v_R(\infty) = v_{R\max} - 1 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

túllendülése kizárólag a ξ csillapítási tényezőnek a függvénye. A ξ=0 paraméter mellett a rendszer csillapítatlan lengőmozgást végez[9] (oszcillátorként viselkedik, túllendülése 100%, v_{Rmax}=2, Δv_R=1), a lengési periódusidő ekkor $2\pi T_0$. A csillapítási tényező ξ=1 értéke mellett az átmeneti függvény lengéseket *nem* tartalmaz, ilyen esetben a zárt rendszer pólusai azonosak: $p_{R1,2}=-1/T_0$ (aperiodikus határeset, a leggyorsabb *lengésmentes* beállás). Sok gyakorlati alkalmazásban elfogadottnak tekintett csillapítási tényező $\xi=1/\sqrt{2}=0.7071$, amihez Δv_R=0.0432 (~4.3%) túllendülés tartozik. **Ha a túllendülés megengedett értéke Δv_R=0.1 (10%), akkor az ennek megfelelő csillapítási tényező ξ=0.5910≈0.6.** Érdemes megfigyelnünk, hogy a zárt rendszer $W_R(s)$ átviteli függvénye akkor rendelkezik egységnyi átviteli tényezővel, és domináns póluspárral, ha a nyitott hurok $W_0(s)$ átviteli függvénye **egy tárolós integráló** tagnak felel meg. A hatásvázlat alapján ugyanis:

$$W_0(s) = \frac{1}{T_0^2}\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{2\xi}{T_0}\frac{1}{s}}\frac{1}{s} = \frac{1}{2\xi}\frac{1}{1+s\frac{T_0}{2\xi}}\frac{1}{sT_0} = \frac{k}{sT_i(1+sT)} \qquad k = 1/(2\xi) \quad T_i = T_0 \quad T = T_0/(2\xi)$$

és ekkor:

$$W_R(s) = \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} = \frac{1}{1+2\xi T_0 s + T_0^2 s^2}$$

Mindezekből pedig az is következik, hogy a szabályozás $W_0(s)=W_c(s)W_p(s)$ nyitott köri átviteli függvényének kialakításakor célszerű olyan $W_c(s)$ átviteli függvényű szabályozót választani, hogy a nyitott körre a fenti tulajdonságok – nevezetesen, hogy $k_i=1/(2\xi T_0)$, $T=T_0/(2\xi)$ paraméterekkel rendelkező egytárolós integráló taggal leírható legyen – teljesüljenek. Ha ez megvalósítható, akkor a nyitott kör k, T_i és T paramétereivel a zárt rendszer alapjelugrásra vonatkozó lengésképe egyszerűen tervezhető.

---

[9] Ilyen viszonyokat a **zárt** szabályozási rendszer működésében nem szabad megengedni.