1. Jelölje B_n azt a gráfot, melynek csúcsai az n hoszúságú $0-1$ sorozatok, két sorozat akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha pontosan egy vagy két helyen különböznek. Adjuk meg az összes olyan n-et, amire a B_n gráf tartalmaz (zárt) Euler-körsétát.

   Megoldás:

   Euler-kör pontosan akkor van a gráfban, ha (esetleges izolált pontoktól eltekintve) összefüggő és minden fokszáma páros.

   (Ha csak az egyik feltétel szerepel, akkor 1 pont, de ha később mégis mindkét feltétel teljesülését ellenőrzi, akkor megkaphatja a 2 pontot.)

   B_n minden csúcsa annyi további csúccsal van összekötve, ahányféleképpen az n koordináta közül kiválasztható az egy vagy két különbözési hely, azok ugyanis egyértelműen meghatározzák a másik csúcsot, hiszen mindenütt vagy 0 vagy 1, azaz kétféle érték egyike áll.

   Egy különbözési hely n féle lehet,

   két különbözési hely pedig $\binom{n}{2}$ féle.

   Az összes fokszám értéke tehát $\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ez pontosan akkor páros, ha n vagy $n+1$ osztható 4-gyel, azaz $n = 4k, 4k-1$ egyike teljesül valamilyen k pozitív egészre.

   A gráf minden n-re összefüggő, hiszen egyesével megváltoztatva a különbözési helyeken álló koordinátákat, tetszőleges csúcsból tetszőleges másikba eljuthatunk élek mentén.

   Euler-kör tehát pontosan akkor lesz, ha $n = 4k$ vagy $4k-1$ alakú.

2. Egy G egyszerű gráf csúcsainak száma 100, legkisebb fokszáma pedig 80. Mutassuk meg, hogy G tartalmaz 16 olyan Hamilton-kört, melyek közül semelyik kettőnek nincs közös éle.

   Megoldás:

   Alkalmazzuk Dirac-tételét, eszerint (egy) Hamilton-kör létezik, hiszen $80 \geq \frac{100}{2}$.

   Hagyjuk el a megtalált Hamilton-kör éleit, ezzel minden csúcs fokszáma 2-vel csökken.

   A megmaradó gráf fokszámainak mindegyike legalább 78, ami még mindig eléri a 100 felét, így ebben is van Hamilton-kör.

   Ismét hagyjuk el egy Hamilton-kör éleit, majd a fenti lépéseket ismételjük.

   A minimális fokszám csak a 16-odik Hamilton-kör törlése után csökkenhet 50 alá (hiszen minden lépésben 2-vel csökken). Ezért 16 Hamilton-kört biztosan találunk.

3. Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük olyan, amelyik három másikat is tud ütni.

   Megoldás:

   Vegyük észre, hogy a sakktábla világos mezőin álló huszárok csak sötét mezőn állókat üthetnek és viszont.

   Ezért ha elkészítjük azt a H gráfot, aminek csúcsai a huszárok és kettőt pontosan akkor köt össze él, ha ütni tudják egymást,

   akkor ez a gráf páros gráf lesz.

   A feltételek miatt H minden fokszáma legalább kettő,

   és a nagyobb oldalán legalább 4 csúcs van.

Az élek száma az egyik oldali fokszámok összege, tehát legalább $4 \cdot 2 = 8$.

A kisebbik oldalon legfeljebb 3 csúcs van, ha mindnek a fokszáma legfeljebb 2 lenne, akkor legfeljebb 6 élünk lehetne, vagyis van köztük olyan, aminek a foka legalább 3. Az ennek megfelelő huszár tehát legalább 3 másikat tud ütni.

4. Egy gráf csúcsai a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek, két csúcsot összekötünk, ha az összegük osztható hárommal. Perfekt-e a gráf?

   Megoldás:

   A 3-mal osztható számok egy 33 csúcsú klikket alkotnak a gráfban.

   A gráf minden további éle egy 3-mal osztva 1 és egy 3-mal osztva 2 maradékot adó csúcsot köt össze. (Az ilyen párok mindegyikét összekötjük.)

   A gráf tehát egy K_{33} teljes gráf és egy $K_{33,34}$ teljes páros gráf diszjunkt uniója.

   Teljes gráfok és páros gráfok perfektek.

   Két perfekt gráf diszjunkt uniója nyilvánvalóan perfekt, hiszen egy diszjunkt unióként előálló gráf kromatikus száma is és klikkszáma is az összetevő gráfok megfelelő paraméterének maximuma lesz, amik perfekt összetevők (illeteve ilyeneknek szintén perfekt feszített részgráfjai) esetén mindig egyenlők.

   A megadott gráf tehát két perfekt gráf diszjunkt uniója és így perfekt.

5. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 55. Mennyi a kromatikus száma, ha tudjuk, hogy a komplementere páros gráf?

   Megoldás:

   A komplementer páros gráf valamelyik oldalán legalább 50 pont van és ezek klikket alkotnak a mi G gráfunkban.

   Az 50 méretű klikk jelenléte miatt a kromatikus szám legalább 50.

   Megmutatjuk, hogy pontosan 50, vagyis a gráf ki is színezhető ennyi színnel.

   Mivel a gráf reguláris, a komplementere is az.

   Mivel reguláris páros gráfban mindig van teljes párosítás, $\bar{G}$-ben is van.

   Tekintsük $\bar{G}$ egy teljes párosítását és színezzünk azonos színűre két pontot pontosan akkor, ha ebben a $\bar{G}$-beli teljes párosításban egymás párjai. Így egy jó színezést kapunk 50 színnel.

6. Egy G egyszerű páros gráfban minden csúcs fokszáma legalább k. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G-ben van k élet tartalmazó párosítás.

   Megoldás:

   Készítsünk párosítást mohón: az első pontot tetszőlegesen párosítsuk egy szomszádjával, majd minden lépésben töröljük a már párosított pontokat, és a megmaradtak közül egy tetszőlegesen választottat párosítsunk össze egy tetszőleges még megmaradt szomszédjával.

   Mivel a gráf páros, minden csúcsnak minden lépésben legfeljebb egy szomszédját töröljük.

   Az eljárás tehát biztosan folytatható addig, amíg nem töröltünk k párt, vagyis k méretű párosítás biztosan létezik.

   Alternatív megoldás:

   A Kőnig-tétel szerint G gráfunkra, mivel páros, fönnáll $\nu(G) = \tau(G)$.

   Elég tehát $\tau(G) \geq k$ igazolása.

Legyen U minimális lefogó halmaz. Ha $v \notin U$, akkor v-nek minden szomszédja U-ban van, másként a hozzá csatlakozó élek nem volnának mind lefogva.

Ezért $|U| \geq d(v) \geq k$.

Ha nem létezne $v \notin U$ csúcs, akkor G minden csúcsa szerepelne U-ban. Márpedig G-nek k-nál több (valójában legalább $2k$) csúcsa van, másképp nem lehetne egy fokszám sem legalább k. Vagyis $|U| \geq k$ ekkor is igaz.