ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

2012. máj. 3.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (8 pont)

A megfelelő definícióval bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}+2x\right)=12 \qquad (\delta(\varepsilon)=?)$$

$$|f(x)-A| = \Big|\underbrace{\frac{x^2-9}{x-3}}_{\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}} + 2x - 12\Big| \underset{x\neq 3}{=} |x+3+2x-12| =$$

$$= |3x-9| = 3|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta(\varepsilon)$$

2. feladat (22 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-3}$$

a) Hol és milyen típusú szakadása van a függvénynek? (Indokoljon!)
$\lim_{x\to\infty} f(x) = ?$

b) Írja fel $f'(x)$-et, ahol az létezik!

c) Adjon meg egy intervallumot, melyen f invertálható! (Indokoljon!)
$f^{-1}(x) = ?$, $\quad D_{f^{-1}} = ?$

a.) Szakadási hely: $x=3$

$\boxed{8}$

6

$$f(3\pm 0) = \lim_{x\to 3\pm 0} \operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\frac{1}{x-3}}_{\to\pm 0\ \to\ \pm\infty}\Big) = \pm\frac{\pi}{2}$$

$f(3+0) \neq f(3-0)$ (de végesek) $\Rightarrow$ véges ugrás (elsőfajú szakadás van itt)

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\frac{1}{x-3}}_{\to 0}\Big) = \operatorname{arctg} 0 = 0 \qquad 2$$

b.) Ha $x \neq 3$:

$\boxed{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-3}\right)^2}\,\frac{-1}{(x-3)^2}$$

($f'(3)$ $\nexists$, mert f nem értelmezett $x=3$-ban.

an1z2p120503/1

c.) Ha $x>3$: $f'(x)<0 \Rightarrow f$ szigorúan monoton csökken

$\boxed{10}$ $(3,\infty)$-en $\Rightarrow \exists\ f^{-1}$ itt (2)

$$y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-3} \Rightarrow \operatorname{tg} y=\frac{1}{x-3} \Rightarrow x-3=\frac{1}{\operatorname{tg} y}$$

$$\Rightarrow x=3+\frac{1}{\operatorname{tg} y} \qquad x \leftrightarrow y$$

$$f^{-1}(x)=3+\frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad (4)$$

Ha $x\in(3,\infty)$: $\frac{1}{x-3}\in(0,\infty)$, ezért $\operatorname{arctg}\frac{1}{x-3}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (2)

$$D_{f^{-1}}=R_f=\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

3. feladat (13 pont)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x^2+1)^3}, & \text{ha} \quad x\le 0\\[2mm] \dfrac{\sin(\pi x)}{x}, & \text{ha} \quad x>0\end{cases}$$

a) Hol és milyen szakadása van f-nek?
b) Létezik-e $f'(0)$?
Írja fel $f'(x)$-et, ahol az létezik!

a.) Csak $x=0$-ban lehet szakadása.

$\boxed{5}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0-0)=f(0)=1 \quad (1)\\ f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin\pi x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\underbrace{\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}}_{\to 1}\cdot\pi=\pi \quad (3)\end{array}\right\} \neq \text{: véges ugrás (1)}$$

b.) $f'(0)\ \nexists$, mert f nem folytonos $x=0$-ban. (2)

$\boxed{8}$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-3}{(x^2+1)^4}\cdot 2x, & \text{ha } x<0 \quad (3)\\[2mm] \dfrac{\pi(\cos\pi x)\cdot x-\sin\pi x\cdot 1}{x^2}, & \text{ha } x>0 \quad (3)\end{cases}$$

an1z2p120503/2.

4. feladat (24 pont)

$a)\quad \lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(4x+1)}{\operatorname{ch}(4x-2)} = ?$ $\qquad b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - 1}{8x^2} = ?$

$c)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^3}{x^2} = ?$ $\qquad d)\quad \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{2x^2+5x} - \sqrt{2x^2+7x-5}\right) = ?$

a.) $\boxed{7}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sh(4x+1)}{ch(4x-2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{4x+1}-e^{-(4x+1)}}{e^{4x-2}+e^{-(4x-2)}} = \quad (2)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{e^{4x}}{e^{4x}}}_{=1}\ \frac{e - e^{-8x-1}}{e^{-2}+e^{-8x+2}} = \frac{e-0}{e^{-2}+0} = e^3$$

(3) (2)

b.) $\boxed{5}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{8x^2} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin 4x\cdot 4}{16x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin 4x}{4x} = -1$$

c.) $\boxed{4}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^3}{x^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}\cdot 3x^2}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2} = 0$$

d.) $\boxed{8}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x}-\sqrt{2x^2+7x-5}\right)\frac{\sqrt{2x^2+5x}+\sqrt{2x^2+7x-5}}{\sqrt{2x^2+5x}+\sqrt{2x^2+7x-5}} =$$

(2)

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+5}{\sqrt{2x^2+5x}+\sqrt{2x^2+7x-5}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}\ \frac{-2+\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{5}{x}}+\sqrt{2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}}} =$$

(2)

$$= \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$$

$$= -1\cdot\frac{-2+0}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (4)$$

5. feladat (13 pont)

$$f(x) = (1+\operatorname{ch} 3x)^{1+x/5}$$

a) $f'(x) = ?$

b) Írja fel az $x=0$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

a.)

$$f(x) = e^{\ln(1+ch3x)^{1+x/5}} = e^{(1+\frac{x}{5})\ln(1+ch3x)} \quad (2) \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$f'(x) = e^{(1+\frac{x}{5})\ln(1+ch3x)}\cdot\left(\left(1+\frac{x}{5}\right)\ln(1+ch3x)\right)' = \quad (3)$$

$$= (1+ch3x)^{1+x/5}\left(\frac{1}{5}\ln(1+ch3x)+\left(1+\frac{x}{5}\right)\frac{sh3x\cdot 3}{1+ch3x}\right)$$

(4)

an1z2p120503/3.

b.) $y_{é} = f(0) + f'(0)(x-0) = 2 + \frac{2}{5}(\ln 2)\cdot x$ (2) (2)

6. **feladat (10 pont)**

Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az

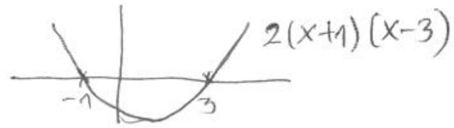
$$f(x) = \frac{2x^2+6}{x-1}$$

függvény monoton növő, illetve csökkenő!

$$f'(x) = \frac{4x(x-1)-(2x^2+6)}{(x-1)^2} = \frac{2(x+1)(x-3)}{(x-1)^2} \qquad x \neq 1$$

(2) (2)

$(x-1)^2 \geq 0$



	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	↗		↘	szak. hely	↘		↗

f mon. nő $(-\infty,-1)$ és $(3,\infty)$ intervallumokon

f mon. csökken $(-1,1)$ és $(1,3)$ intervallumokon

(6)

7. **feladat (10 pont)**

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 7 + e^{2x-1}$$

Hol konvex, hol konkáv az f függvény?

Hol van inflexiós pontja?

an1z2p120503/4

$f'(x) = -4x + 3 + 2e^{2x-1}$ (2)

$f''(x) = -4 + 4e^{2x-1} = 4(e^{2x+1} - 1) = 0$

(2)

$e^{2x+1} = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ (2)

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	infl. p.	$\smile$

} (4)

Pótfeladatok (csak a 40 pont eléréséig javítjuk ki):

8. feladat (11 pont)

A jobb és bal oldali határértékek kiszámítása után döntsön, hogy hol és milyen szakadása van az alábbi függvényeknek!

$$f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2(x+3)} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} + \frac{1}{x-2}$$

f szakadási helyei : $x = 0$ és $x = -3$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{x^2}_{\to +0}} \underbrace{\frac{2x^2 - 18}{x+3}}_{\to -6}}_{\to +\infty} = -\infty$

másodfajú szak.

(3) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{2(x-3)(x+3)}{x^2(x+3)} = \lim\limits_{x \to -3} \cancel{\frac{x+3}{x+3}} \frac{2(x-3)}{x^2} = -\frac{4}{3}$

megszüntethető szak.
(elsőfajú szak.)

(6) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{|x-2|} + \frac{1}{x-2}$: szakadási hely: $x = 2$

$g(2+0) = \lim\limits_{x \to 2+0} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to 2+0} \frac{2}{\underbrace{x-2}_{\to +0}} = +\infty$

$g(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0} \underbrace{\left(\frac{1}{-(x-2)} + \frac{1}{x-2}\right)}_{\equiv 0} = 0$

} másodfajú szakadás

an1z2p1205035.

9. feladat (9 pont)

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$$

Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken a függvény szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!

ÉT: $x \neq -1$

Ha $x \neq -1$:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+1)^3 - (x-1)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{-2x+4}{(x+1)^4}$$ 3 1

5

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,\infty)$
f'	+	$\nexists$	+	0	−
f	↗	szak. hely	↗		↘

f szig. mon. nő $(-\infty,-1)$ és $(-1,2)$ intervallumokon

f szig. mon. csökken a $(-1,2)$ intervallumon

an1z2p120503/6.