1. Definiálja a norma fogalmát és tulajdonságait

Adott X lineáris tér egy $\mathbb{F}$ test felett. Egy $\|\cdot\|$ leképezést, hogy $\|\cdot\|: X \to \mathbb{F}$ az X lineáris tér normájának nevezzük, ha $x, y \in X$ és $\lambda \in F$

1. $\|x\| \geq \emptyset$ és $\|x\| = \emptyset$ a.cs.a. $x = \emptyset$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (háromszög egyenlőtlenség

2. Hogyan definiálhatók az L_2 és L_∞ terek?

L_p tér

Tekintsük az összes $f: X \to \mathbb{F}$ ($\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) leképezések halmazát.
Az L_p (Lebesgue) függvényterekre igaz, hogy:

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$$

Az L_p tér $\mathbb{F}$ test felett az elemek pontonkénti összeadásra zárt

$$f(x) + g(x) = (f+g)(x) \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$\|f\|_p = \int_X \|f\|^p \, d\mu < \infty$$

L_∞ esetében a norma $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} f(x)$

Egy stabil lineáris rendszer $L_p \mapsto L_p$ képez a be és kimenet között

~~2. Hogyan definiált~~

3. Mit értünk indukált norma alatt?

A egy lineáris korlátos leképezés X és Y normált lineáris terek között. A korlátos leképezések halmaza szintén lineáris tér és X és Y normái alapján bevezethető egy indukált norma.

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

4. Tekintse a véges dimenziós euklideszi vektorterek közötti lineáris leképezések halmazát. Mi a kapcsolat az indukált norma és a szinguláris érték felbontása között?

Egy R^n vektortérben a $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ standard skalár szorzat, a $\|.\|_2$ normát definiálja, azaz az Euklideszi terek Hilbert terek

$A(R^m \to R^n)$ korlátos lineáris leképezés $\|.\|_2$ indukált normája

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^* A)} = \bar{\sigma}(A)$ azaz A legnagyobb szinguláris értéke.

5. Definiálja a Hilberttér fogalmát és soroljon fel rá példákat!

Adott egy X lineáris tér. A $\langle .,. \rangle$ skalár szorzat egy $\langle .,. \rangle : X \times X \mapsto F$ leképezés a következő tulajdonságokkal

1.) $\langle f, f\rangle \geq \emptyset$ és $\langle f, f\rangle = \emptyset \iff f = \emptyset$

2.) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ ← komplex konjugált

3.) $\langle f, \alpha g + \beta h\rangle = \alpha\langle f, g\rangle + \beta\langle f, h\rangle$

Amennyiben a $\langle .,. \rangle$ skalárszorzat segítségével (ami X feletti) definiált $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ $(f \in X)$ norma X felett, továbbá a normával az X egy Banach tér, akkor X Hilbert tér

minden Cauchy-konvergens sorozat határértéke is X eleme

Példa a Hilbert-terekre

Egy R^n $(n < \infty)$ vektortérben a $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ standard skalár szorzat a $\|\cdot\|_2$ normát definiálja, azaz az Euklideszi terek Hilbert-terek.

A normák skalár szorzatból adódnak! (H_∞, $L_\infty(j\mathbb{R})$, $\bar{H}_\infty$ nem Hilbert terek)

6. Definiálja a H_2 és H_∞ tereket

~~H_2 tér a $L_2(j\mathbb{R})$~~

Adott az $f: S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény. A függvény analitikus egy $z_0 \in S$ pontban, ha ott minden deriváltja létezik, és hatványsorba fejthető. Ha f mátrixfüggvény, akkor f-et analitikusnak mondjuk, ha a mátrix minden eleme analitikus függvény.

H_2 az $L_2(j\mathbb{R})$ tér zárt altere, amely a komplex számsík jobb félsíkján analitikus függvényeket tartalmazza az alábbi normával

$$\|F\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{trace}\left|F^*(j\omega)F(j\omega)\right| d\omega$$

RH_2-tér a H_2-tér olyan altere, a stabil lineáris MIMO rendszerek átviteli mátrixának halmaza, amelyek minden eleme olyan racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a jobb félsíkon.

H_∞ tér a L_∞ altere, azon függvények halmaza, amelyek korlátosak és analitikusak a jobb félsíkon. Ezen halmazon az alábbi normát lehet definiálni

$$\|F\|_\infty = \sup_{Re(s)>0} \bar{\sigma}\left[F(j\omega)\right] = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}\left[F(j\omega)\right]$$

7. Bizonyítsa be, hogy stabil lineáris rendszerekre a $L_\infty(j\mathbb{R})$ norma indukált norma, ha a lineáris rendszer átviteli mátrixa $G(s): L_2^p \to L_2^q$

Legyen adott $G(s) \in L_\infty(j\mathbb{R})$ egy racionális $p \times q$ átviteli mátrix (p bemenet és q kimenet). $G(s)$ egy lineáris leképezést valósít meg két normált tér között: $G(s)\ L_2^p \longrightarrow L_2^q$

$$\|G\| = \sup_{\|f\|_2 = 1} \|Gf\|_2 = \|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}\left[G(j\omega)\right]$$

$$\|Gf\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(j\omega)\cdot G^*(j\omega)G(j\omega)f(j\omega)\,d\omega \leq \|G\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(j\omega)f(j\omega)\,d\omega =$$

$$= \|G\|_\infty^2 \|f\|_2^2$$

A $\|G\|_\infty$ a felső korlátja az indukált normának.

Legyen ω_0 az a körfrekvencia, ahol $G(j\omega)$ szinguláris értéke a legnagyobb $\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \|G\|_\infty$. Ezen a frekvencián a szinguláris felbontás:

$$G(j\omega_0) = \bar{\sigma}\, u_1(j\omega_0)\, v_1^*(j\omega_0) + \sum_{i=2}^{r} \sigma_i u_i(j\omega) v_i^*(j\omega)$$

$r = \min\{p, q\}$

Ha olyan f-et konstruálunk, ami v_1-el párhuzamos és ω_0 környezetben $\|f\|_2 = 1$, máshol $\emptyset$.

$$f(s) = v_1(j\omega_0)\hat{f}(s) \qquad \hat{f}(s) = \begin{cases} \sqrt{\pi/2\varepsilon} & \text{ha } |\omega - \omega_0| < \omega \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ebből következik

$$\|Gf\|_2^2 = \bar{\sigma}\left[G(j\omega)\right]^2 = \|G\|_\infty^2$$

8. Hogyan számítható a H_2 norma egy $G(s): L_2^p \to L_2^q$ átviteli mátrix esetében?

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{trace}\left(G^*(j\omega)\,G(j\omega)\right) d\omega}$$

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{trace}\left[g^*(t)\,g(t)\right] dt}$$

9. Hogyan számítható a H_∞ norma egy $G(s): L_2^p \mapsto L_2^q$ átviteli mátrix esetében? Hogyan működik a felezési algoritmus

$$\|G\|_\infty = \mathrm{ess}\sup_{\omega} \bar{\sigma}\left(G(j\omega)\right)$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

Minden ω-ra ki kell számolni egy maximális szinguláris értéket, az így kapott függvény maximumát kell megkeresni.

Ezt úgy is fel lehet fogni, mint egy worst case erősítést.

A maximum megkereséséhez felezési algoritmust alkalmazhatunk, ahol azt döntsük el, hogy $\|G\|_\infty < \gamma$

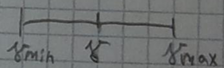
Felezési algoritmus lépései $\|G\|_\infty$ meghatározására:

1.) inicializálás, γ_{min} és γ_{max} ($\gamma_{min} \le \|G\|_\infty \le \gamma_{max}$) és a tolerancia meghatározása

2.) Ha $\dfrac{\gamma_{max} - \gamma_{min}}{\gamma_{min}} \le tol$, megtaláltuk az értéket, $\|G\|_\infty = \dfrac{\gamma_{max} + \gamma_{min}}{2}$ befejeztük a keresést.

Ha nem teljesül, lépünk a következő lépésre

3.) $\gamma = \dfrac{\gamma_{max} - \gamma_{min}}{2}$



4.) $\|G\|_\infty < \gamma$ tesztelése: H képzése és sajátérték meghatározása

5.) Ha H-nak van sajátértéke $j\mathbb{R}$-en (komplex tengelyen), akkor $\gamma_{min} := \gamma$, ha nincs $\gamma_{max} := \gamma$

ugrás a 2. lépésre

10. Hogyan magyarázható szemléletesen a H_∞ norma egy $G(s): L_2^p \mapsto L_2^q$ átviteli mátrix esetében?

Bemenet (szinuszos gerjesztés)

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \sin(\omega_0 t + \Phi_1) \\ u_2 \sin(\omega_0 t + \Phi_2) \\ \vdots \\ u_q \sin(\omega_0 t + \Phi_q) \end{bmatrix} \qquad \hat{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_q \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \sin(\omega_0 t + \vartheta_1) \\ y_2 \sin(\omega_0 t + \vartheta_2) \\ \vdots \\ y_p \sin(\omega_0 t + \vartheta_p) \end{bmatrix} \qquad \hat{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

$$\|G\|_\infty = \sup_{\phi_i, \omega_0, \hat{u}} \frac{\|\hat{y}\|}{\|\hat{u}\|}$$

11. Mi a kapcsolat egy $G(s): L_2^p \mapsto L_2^q$ átviteli ~~függvén~~ mátrix frekvenciafüggő SVD felbontása és normája között?

Az $A \in C^{m \times n}$ mátrix sz.é. felbontása (SVD) a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$A = U \cdot \Sigma V^*$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Sigma_1 = \mathrm{diag}(\sigma_i)$$

Szinguláris érték tulajdonságok

1. $\bar{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ maximális erősítés

2. $\underline{\sigma}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ minimális erősítés

3. $\underline{\sigma}(A) \leq \lambda_i(A) \leq \bar{\sigma}(A)$

4. $\exists A^{-1} \Rightarrow \underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})}$

$$\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}$$

12. Milyen Matlab támogatást ismer normák számítására?

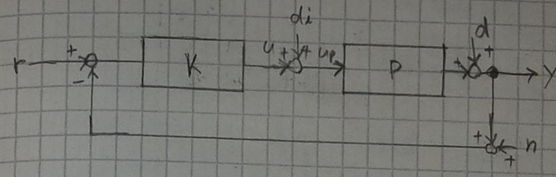
norm(sys, inf) (Control Sytem Toolbox)
hinfnorm (sys, tol)

hinf
hinfsyn (P, nmeas, ncon)
hinfnorm (sys, tol)

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right]$$

13. Adott egy K átviteli függvényű MIMO szabályozó és egy P átviteli függvényű szakasz. Adja meg a hagyományos szabályozási kör hatásvázlatát és a belső stabilitáshoz ~~használt~~ vizsgálatához használt hatásvázlatot

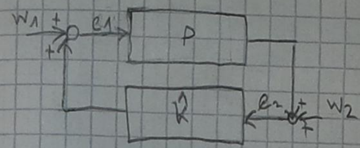
Hagyományos hatásvázlat



r - alapjel
u - szakasz bemenete
d_i - zavar
u_p - szakasz perturbált bemenete
d - zaj
n - szenzor zaj
y - szakasz kimenete

K - szabályozó
P - szakast

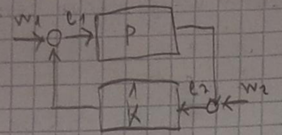
Belső stabilitáshoz használt hatásvázlat



$\hat{K} = -K$

$w_1 = d_i$
$w_2 = d + n - r$ ($\hat{K}$ miatt)

14. Mit értünk a szabályozási struktúra jól meghatározottságán?



Egy zárt rendszer jól meghatározott, ha az összes átviteli függvénye kifejezhető, és elemei proper kifejezések (realizálhatók, nagy frekvencián is végesek)

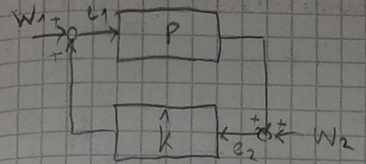
$$e_1 = \hat{K} \cdot e_2 + w_1$$
$$e_2 = P \cdot e_1 + w_2$$

$$w_1 = e_1 - \hat{K} \cdot e_2$$
$$w_2 = -P \cdot e_1 + e_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -P & I \end{bmatrix}$$

A rendszer jól meghatározott, akkor $\begin{bmatrix} I & -\hat{K}(\infty) \\ -P(\infty) & I \end{bmatrix}$ véges és invertálható

15. Mit értünk a visszacsatolt struktúra belső stabilitásán?



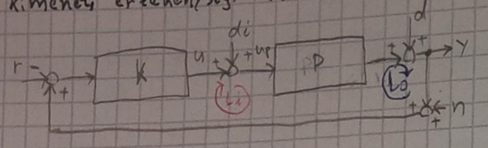
$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\hat{k} \\ -p & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

A visszacsatolt struktúra belsőleg stabil, ha jól meghatározott, és

$$\begin{bmatrix} I & -\hat{k} \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} \in RH_\infty \rightarrow$$ $P(s)$ és $\hat{K}(s)$ stabilizálhatóak és detektálhatók

- $P(s)\hat{K}(s)$ jobb félsíkra eső pólusainak száma n_k és n_p
- $(I - P(s)\hat{K}(s))^{-1}$ stabil

16. Adott egy K átviteli függvényű MIMO szabályozóból és egy P átviteli függvényű szakaszból felépített szabályozási kör. Definiálja a bemeneti és a kimeneti ~~közötti~~ hurokátviteli mátrixokat, be- és ~~kimeneti~~ kimeneti érzékenységi mátrixokat, komplementer érzékenységi mátrixokat



$L_i = K \cdot P$ - bemeneti hurokátvitel

$L_o = P \cdot K$ - kimeneti hurokátvitel

$y = PK(r - y)$ $\qquad$ $u = K(r - P \cdot u)$

$y = PKr - PKy$ $\qquad$ $u = Kr - K \cdot P \cdot u$

$(I + PK)y = PKr$ $\qquad$ $(I + KP)u = K \cdot r$

$y = (I + PK)^{-1} \cdot r$ $\qquad$ $u = (I + K \cdot P)^{-1} \cdot K$

Érzékenységi mátrix:

$S_i = (I + PK)^{-1} = (I + L_i)^{-1}$ - bemeneti

$S_o = (I + KP)^{-1} = (I + L_o)^{-1}$ - kimeneti

$\Rightarrow$ Akkor nyomjuk jól el a zavarást, ha nagy a köratvitel

Komplementer érzékenységi mátrix

$T_i = I - S_i$

$T_o = I - S_o$

17. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie (szinguláris értékeket tekintve) egy MIMO szabályozási kör egyes átviteli mátrixainak, ha kedvező ~~zaj~~ zavar elnyomási tulajdonságot kívánunk elérni? A következtetéseket igazolja!

Átvitel a zavaroktól a kimenethez

$W_{yd} = S_o = (I + L_o)^{-1}$

$W_{yd_i} = S_o P = (I + L_o)^{-1} P$

Szinguláris értékek

d $\qquad \bar{\sigma}(S_o) = \bar{\sigma}(I + L_o)^{-1} = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + PK)}$

$d_i \qquad \bar{\sigma}(S_o P) = \bar{\sigma}((I + L_o)^{-1} \cdot P) = \bar{\sigma}(P S_i)$

A jó zavarelnyomáshoz a körerősítésnek nagynak kell lenni, $\bar{\sigma}(S_o)$ és $\bar{\sigma}(S_o P)$-nek pedig minél kisebbnek

Átviteli zavaroktól a szakasz bemenetéhez

$W_{u_p d} = (K P K) = L_i \cdot K = K \cdot L_o$

$W_{u_p d_i} = L_i$

d $\qquad \bar{\sigma}(S_i K) = \bar{\sigma}(I + L_i)^{-1} = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + KP)^{-1} \cdot K}$

$d_i \qquad \bar{\sigma}(S_i) = \bar{\sigma}(I + L_i)^{-1} = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + KP)^{-1}}$

Legyenek minél kisebbek, hogy d, d_i-t jól elnyomjuk

A d és d_i zavarások tipikusan alacsony frekvencián jelentősek

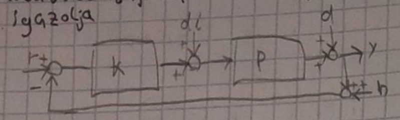
$\underline{\sigma}(L_i) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + L_i) \leq \underline{\sigma}(L_i) + 1$

$\underline{\sigma}(L_o) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + L_o) \leq \underline{\sigma}(L_o) + 1$

$\bar{\sigma}(S_o) \ll 1 \Rightarrow \underline{\sigma}(L_o) \gg 1$

$\bar{\sigma}(S_i) \ll 1 \Rightarrow \underline{\sigma}(L_i) \gg 1$

18. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie (a szinguláris értékek tekintve) egy MIMO szabályozási kör egyes átviteli mátrixainak, ha kedvező zajelnyomás tulajdonságokat kívánunk elérni? A következtetéseit igazolja



$$y = (I - S_o)(r - n) + S_o d + S_o P d_i$$

$$y = T_o (r - n) + S_o d + S_o P d_i$$

$\underline{\sigma}(L_o) \gg 1 \Rightarrow \overline{\sigma}(S_o) \ll 1$

Ha a körerősítés minden frekvencián nagy, d és d_i zavarást, annál $y \approx (r - n)$, tehát minél jobban elnyomjuk jobban átengedjük n-et.

A zaj általában nagyfrekvenciás, a zaj pedig kisfrekvenciás

19. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie (a szinguláris értékeit tekintve) egy MIMO szabályozási kör egyes átviteli mátrixainak, ha kedvező robusztus stabilitást kívánunk elérni? Következtetéseket igazolja!

A szakasz átvitele eltér a tervezéshez használt modelltől.

$$P_\Delta = (I + \Delta)P$$

ahol P stabil és a különbséget definiáló átviteli mx is stabil.
Feltételezzük, hogy $\Delta = 0$-ra a rendszer stabil.
A rendszer akkor stabil, ha

$$\det((I + \Delta P K) = \det((I + (I + \Delta)PK) = \overbrace{\det(I + PK)}^{\text{stabil}} \det(I + \Delta T_o)$$

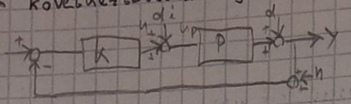
determinánsnak nincs jobb oldali zérusa. A névleges kör stabil $\det(I + PK)$

- Ha ΔT_o kellően kicsi $\det(I + \Delta T_o)$-nak nincs zérusa (kellően kicsi)
- Adott Δ esetén, ha $\|\Delta T_o\|$ kicsi, ha $\|T_o\|$ kicsi $\Rightarrow \overline{\sigma}(T_o)$ kicsi

$T_o = I - S_o = I - (I + L_o)^{-1}$ $\quad \overline{\sigma}(T_o)$, ha $\overline{\sigma}(L_o)$ kicsi

Konfliktus a zavarelnyomás és a robusztus stabilitás között
Δ nagyobb frekvencián nagyobb, mert ott a szakasz átvitelének nagyobb a bizonytalansága

20. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie (a sz. é.-it) tekintve) egy MIMO szab. kör egyes átviteli mátrixainak, ha nem kívánunk túl nagy beavatkozó jelet megfigyelni a szabályozási kör kimenetén? A következtetéseket igazolja!



$u = KS_o(r - n - d) - T_i d_i$

Nagy körerősítés, ahol $\bar{\sigma}(P)$ kicsi

- a zavarelnyomáshoz nagy körerősítés kellett $\underline{\sigma}(L_o) \gg 1$
- ahol $\bar{\sigma}(P)$ kicsi $\rightarrow \underline{\sigma}(K)$ nagy
- ha $\underline{\sigma}(K)$ nagy, akkor nagy beavatkozó jelet jelenthet és telítődésbe mehet a beavatkozó

$u \approx P^{-1}(r - n - d) + d_i$

21. Fogalmazza meg és illusztrálja a Loop-shaping (hurokformálási) problémát. Honnan erednek az előírások, az alacsony és honnan a magas frekvencia tartományban?

Feltételezések:

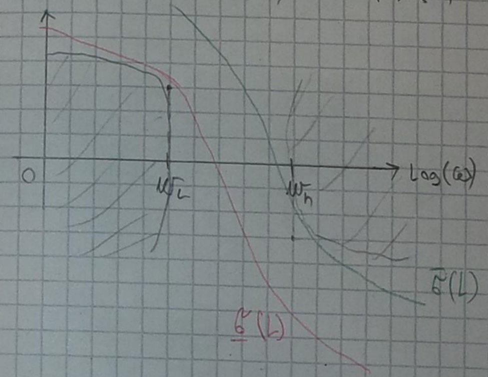
- zavarások alacsony frekvenciásak
- zaj magasfrekvenciás
- bizonytalan dinamika gyors (magas frekvenciás)
- szakasz aluláteresztő jellegű (nagy frekvencián kicsi az erősítés)

Alacsony frekvencián $(0, \omega_L)$ tartományban a jó zavaráselnyomás és a statikus pontosság miatt legyen nagy a körerősítés

$\underline{\sigma}(PK) \gg 1$, $\underline{\sigma}(KP) \gg 1$, $\underline{\sigma}(K) \gg 1$

Nagy frekvencián ((ω_H, ∞) tartományban) a robusztusság, a zajelnyomás és a beavatkozó szerv telítődéses jellege miatt a körerősítés legyen kicsi

$\bar{\sigma}(PK) \ll 1$, $\bar{\sigma}(KP) \ll 1$, és $\bar{\sigma}(K) \leq M$



22. Mutasson H_2 és H_∞ normákra ~~vonatkozó~~ alapuló költségfüggvényeket a szabályozási kör performanciájának biztosításához!

H_2 performancia függvény

Egyszerűsítés $n = d_1 = 0$, d hatását vizsgáljuk a beavatkozó jelre és a kimenetre.

d egy vektor, $\tilde{d}$ pedig egy véletlen irányú vektor

A zavarás hatására keletkező követési hiba energiájának várható értéke:

$$E\{\|e\|_2^2\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \|e\|^2 dt\right\} = \|W_e S_0 W_d\|_2^2$$

ezt akarjuk minimalizálni

23. Definiálja és magyarázza meg a modellbizonytalanság fogalmát!

Bizonytalanság

A modell és a valóság közötti különbség, függetlenül attól, hogy a különbözőséget milyen mechanizmus (elhanyagolás, egyszerűsítés, zaj stb.) okozza.

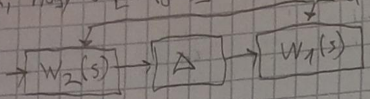
- Mivel a bizonytalanságot is modellezni fogjuk ezért a modell és a valóság közötti leképzés problémáját nem oldjuk meg.
- A bizonytalanság modellezésére egy modell osztályt hozunk létre és így csökkentsük az eltérést a modell és a valóság között
- Egyes tulajdonságokat (stabilitás és performancia) a teljes modellosztályra kívánunk (robusztusan) garantálni

A modellek és a valóság nehezen leírható
- Modell annál jobb minél közelebb vannak a válaszai a valós rendszerhez
- szabályozási kör alkalmazásának egyik oka a modellezés problémája

24. Mit nevezünk strukturálatlan és koncentrált bizonytalanságnak?

A bizonytalanságunkat egy Δ átvitelbe koncentráljuk. Ha $\Delta(s)$ bizonytalanságnak csak a nagyságáról tudunk nyilatkozni (pl. $\bar{\sigma}[\Delta(j\omega)]<1$) akkor $\Delta(s)$ strukturálatlan bizonytalanság

A bizonytalanságok nélküli $W_1(s)$ és $W_2(s)$ súlyozó függvényekkel elérhetjük, hogy $\bar{\sigma}[\Delta(j\omega)]$ teljesüljön. a súlyozás lehet frekvencia függő

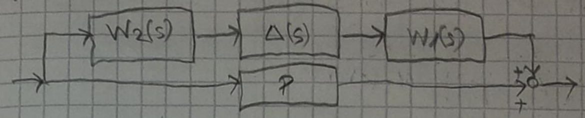


25. Definiálja és illusztrálja az additív és multiplikatív bizonytalanság fogalmát!

Legyen P a nominális szakasz

Additív bizonytalanság

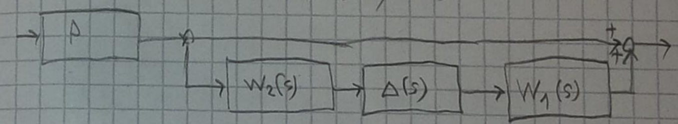
$$P_\Delta(s) = P(s) + W_1(s)\Delta(s)W_2(s)$$



A bizonytalanság ugyan azt a bemenetet kapja, mint a szakasz

Multiplikatív bizonytalanság

$$P_\Delta(s) = \left(I + W_1(s)\Delta(s)W_2(s)\right)P(s)$$



A szakasz kimenetét kapja a bizonytalanság

A bizonytalanságnak csak a ∞ normáját ismerjük

26. Definiálja a névleges stabilitás, a robosztus stabilitás, a névleges performancia és a robusztus performancia fogalmakat!

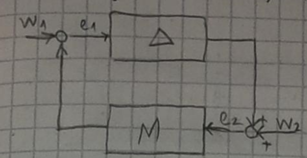
Névleges stabilitás: K-ra és P-re a visszacsatolás belsőleg stabil.

Robusztus stabilitás: K-ra és $\forall$ szakasz $\in \Pi$ esetében a visszacsatolás belsőleg stabil

Névleges performancia: K-ra és P-re teljesülnek a performancia követelmények

Robusztus performancia: K-ra és $\forall$ szakasz $\in \Pi$ esetében teljesülnek a performancia követelmények

27. Mondja ki és bizonyítsa be a kis erősítések tételét!



A kiserősítések tétele az alapja a robusztus stabilitás (RS) kritériumoknak

Tegyük fel, hogy $M \in RH_\infty$ és legyen $\gamma > 0$. A fenti visszacsatolt struktúra acsa jól meghatározott $\Delta(s) \in RH_\infty$ átvitelre, ha

$\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$ és $\|M\|_\infty < \gamma$, vagy ha

$\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$ és $\|M\|_\infty \leq \gamma$

Feltehető, hogy $\gamma = 1$.
Az $M(s)\Delta(s)$ stabil, mert külön-külön is stabilak. Azt kell bizonyítani a belső stabilitáshoz, hogy $\det(I - M\Delta)$-nak nincs gyöke a jobb félsíkon $\forall \Delta \in RH_\infty$ és $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ esetére.

$$\inf_{s \in \mathbb{C}_+} \underline{\sigma}(I - M(s)\Delta(s)) \neq 0$$

$$\inf_{s \in \mathbb{C}_+} \underline{\sigma}(I - M(s)\Delta(s) \geq 1 - \sup_{s \in \mathbb{C}_+} \overline{\sigma}\left(I - M(s)\Delta(s)\right)$$

$$1 - \sup \overline{\sigma}(I - M(s)\Delta(s)) = 1 - \|M(s)\Delta(s)\|_\infty \geq 1 - \|M(s)\|_\infty > 0$$

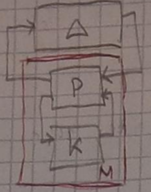
Tegyük fel, hogy $\|M\|_\infty \geq 1$

- Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\Delta \in RH_\infty$, hogy $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, melyre $\det(I - M(s)\Delta(s))$-nek van zérusa a képzetes tengelyen.
- Mivel $\|M\|_\infty \geq 1$, ezért létezik olyan ω_0 melyre $\overline{\sigma}(M(j\omega_0)) \geq 1$
- Legyen $M(j\omega_0)$ SVD felbontása $U(j\omega_0)\Sigma(j\omega_0)V^*(j\omega_0)$, ahol σ_1 a legnagyobb szinguláris érték nagyobb 1-nél.
- Konstatálható Δ, hogy $\Delta(j\omega_0) = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1$ ($\Delta \in RH_\infty$, $\|\Delta\|_\infty \leq 1$)

$$\det\left(I - M(j\omega_0)\Delta(j\omega_0)\right) = \det\left(I - U\Sigma V^* v_1 u_1^* \frac{1}{\sigma_1}\right) = 1 - u_1^* U\Sigma V^* v_1 \frac{1}{\sigma_1} = 0$$

tehát valóban ellentmondásra jutottunk

28. fogalmazza meg az optimális és a szuboptimális H_∞ irányítási problémát!



A szabályozási RS ha $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$ és $\|M\|_\infty < \gamma$
(kis erősítések tétele)

Az M végtelen normáját a K paraméterezi

Optimális H_∞ irányítási probléma: keressük az összes olyan $K(s)$ szabályozót, hogy $\|M\|_\infty$ minimális

Szuboptimális H_∞ irányítási probléma: Adott $\gamma > 0$ esetén keressük az összes olyan $K(s)$ szabályozót, hogy $\|M\|_\infty < \gamma$ (ha létezik)

Itt nem rögzítettük előre a $K(s)$ méretét (állapotainak számát)

29. Mi az a lineáris törtfüggvény

A racionális törtfüggvény egy $s \mapsto F(s)$ leképezés, ahol $F(s)$ alakja

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_1 s^1 + a_0}$$

A lineáris törtfüggvény a racionális t.f. speciális esete, ha a számláló és a nevező elsőfokú polinom

$$F(s) = \frac{a + bs}{c + ds} = \alpha + \beta s (1 - \gamma s)^{-1}$$

A skalár esetet általánosíthatjuk úgy, hogy a hozzárendelést egy M mátrix és annak particionálása definiálja

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in C^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}$$

Alsó lineáris törttranszformáció (Lower LFT)

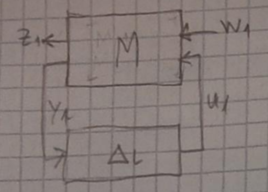
$$\mathcal{F}(M, \Delta_L) = M_{11} + M_{12} \Delta_L (I - M_{22} \Delta_L)^{-1} M_{21}$$

Felső lineáris törttranszformáció (upper LFT)

$$\mathcal{F}(M, \Delta_u) = M_{22} + M_{21} \Delta_u (I - M_{11} \Delta_u)^{-1} M_{12}$$

30. Definiálja és illusztrálja az alsó és felső lineáris törtfüggvény fogalmát

Alsó LFT



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \Delta y_1$$

$$z_1 = \mathcal{F}_l(M, \Delta_l)\, w_1$$

$$z_1 = M_{11} \cdot w_1 + M_{12} \cdot u_1$$

$$y_1 = M_{21} \cdot w_1 + M_{22} \cdot u_1$$

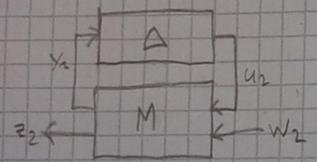
$$z_1 = M_{11} \cdot w_1 + M_{12} \cdot \Delta \cdot y_1$$

$$y_1 = M_{21} w_2 + M_{22}\, \Delta\, y_1 \Rightarrow (I - M_{22}\Delta)\, y_1 = M_{21} w_2$$

$$y_1 = (I - M_{22}\Delta)^{-1} M_{21}\, w_2$$

$$z_1 = \left(M_{11} w_1 + M_{12}\Delta (I - M_{22}\Delta)^{-1} M_{21}\right) w_1$$

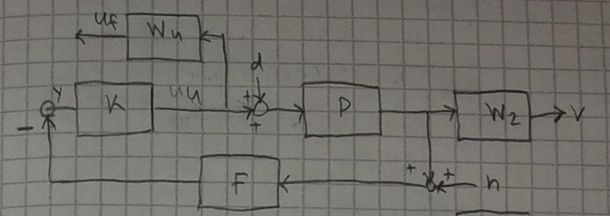
Felső LFT

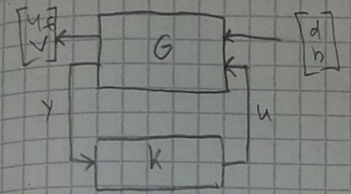


$$z_2 = \mathcal{F}_u(M, \Delta_u)\, w_2$$

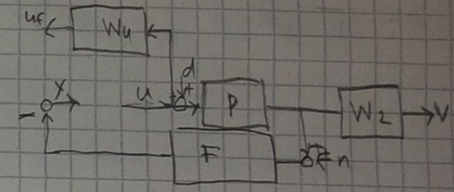
$$z_2 = \left(M_{22} w_2 + M_{21}\Delta (I - M_{11}\Delta)^{-1} M_{12}\right) w_2$$

31. Alakítsa át az alábbi struktúrát LFT-vé:



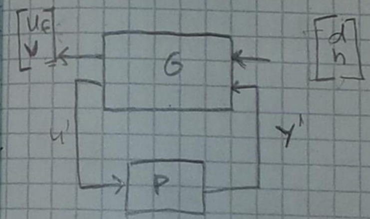


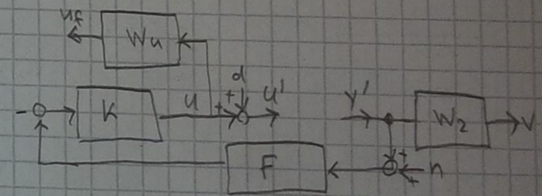
→



$$\begin{bmatrix} u_f \\ v \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & W_u \\ W_2 P & \emptyset & W_2 P \\ -FP & -F & -FP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \\ u \end{bmatrix}$$

Mivel alsó LFT

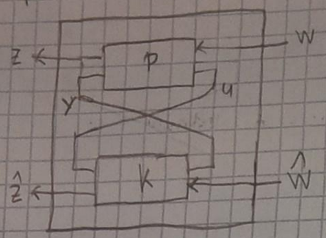




$$\begin{bmatrix} u_f \\ v \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & -W_u KF & -W_u KF \\ \emptyset & \emptyset & W_2 \\ I & -KF & -KF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \\ y' \end{bmatrix}$$

32. Definiálja a Redheffer-csillag szorzatot!

Az alsó és felső lineáris tört transzf. (LFT-k) a Redheffer csillag speciális esetei.



P, K megfelelően partícionált mátrixok

$$P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad K=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

Egyhurkos visszacsatolás az LFT speciális esete.

33. Adja meg az algebrai Ricatti egyenletet

Ljapunov egyenlet. A mátrix egyenlet X megoldását keressük

$$A^*X + XA + Q = \emptyset$$

Q szimmetrikus mátrix

Algebrai Ricatti egyenlet.

$$A^*X + XA + XRX + Q = \emptyset$$

R, Q szimmetrikus

34. Mit értünk az ARE stabil megoldásán és milyen feltételeknek kell teljesülnie, hogy az létezzen?

A Ricatti-egyenlet együttható mátrixaiból felépítjük az ú.n. Hamilton mátrixot

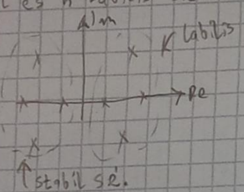
$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}$$

Amely segítségével ARE megoldását kapjuk. Ha X $n \times n$-es, H $2n \times 2n$

H spektruma szimmetrikus a képzetes tengelyre. Ha H sajátértéke λ, $-\lambda$ is s.é.-e. Ennek beállításához

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy H-nak nincs s.é. képzetes tengelyen. Ekkor H-nak van n stabil és n labilis s.é.



H invariáns altereit sajátvektorok feszítik ki. $\bar{X}$ $(2n \times n)$ oszlopai a stabil s.é. tartozó vektorok. $\bar{X}$ m.x. oszlopai H operátor egy n dimenziós invariáns alteret feszítik ki.

$$X_-(H) = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Ha X_1 nem szinguláris, akkor $X = X_2 X_1^{-1}$ ARE egy stabilizáló megoldása.

35. Mit értünk RIC leképzésen?

Adott ARE H mátrixszal

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & A^* \end{bmatrix}$$

Vezessük be azt a leképezést, amely az ARE-hoz tartozó H-hoz hozzárendeli a stabilizáló megoldást

$$Ric: dom(Ric) \subset \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$Ric(H) = X \text{ feltéve ha } H \in dom(Ric)$$

A dom(Ric) értelmezési tartománya olyan Hamilton-mx-ra igaz, amelyeknek:

- Nincs saját értéke a képzetes tengelyen (stabilitás tulajdonság)
- A stabil s.é.-hez tartozó $X_-(H)$ invariáns alteret kifeszítő mx. első n sorából összeállított X_1 mx. invertálható (komplementáris tulajdonság)

36. Milyen tulajdonságai vannak az ARE-hoz rendelt Hamilton-mx.-nak?

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & A^* \end{bmatrix}$$

ha X mérete $n \times n$, H mérete $2n \times 2n$

H spektruma (s.é. elhelyezkedése a komplex félsíkon) szimmetrikus a képzetes tengelyre. Ha λ a H mátrix s.é., akkor $-\bar{\lambda}$ is.