Felsőbb matematika zh (2021 ősz) Matematikai logika

NÉV: NEPTUN KÓD:

Az összes feladatban: jelölje $\times$-el a helyesnek gondolt választ.

1. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak? (Minden jó válasz 1, minden rossz válasz -0.5 pontot ér. Ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, az 0 pont.)

	I	H
$(p \wedge (q \to r)) \to (q \vee r)$ érvényes		
$(p \wedge (q \to r)) \to (q \vee r)$ kielégíthető		
$\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee (q \to p)$ érvényes		
$\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee (q \to p)$ kielégíthető		

(4 pont)

Megoldás. $(p \wedge (q \to r)) \to (q \vee r)$ nem érvényes, mert nem igaz abban a modellben, amelyben p igaz, de q és r hamisak. De kielégíthető, mert pl. minden olyan modellben igaz, amelyben p hamis.

$\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee (q \to p)$ érvényes (és így kielégíthető), mert ha $\mathcal{M}$-ben nem volna igaz, akkor $\mathcal{M} \not\models q \to p$, amiből $\mathcal{M}(p) = 0$, és $\mathcal{M} \models p \wedge (\neg p \vee q)$, következésképp $\mathcal{M} \models p$, ami ellentmond $\mathcal{M}(p) = 0$-nak. Tehát a megoldás:

	I	H
$(p \wedge (q \to r)) \to (q \vee r)$ érvényes		$\times$
$(p \wedge (q \to r)) \to (q \vee r)$ kielégíthető	$\times$	
$\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee (q \to p)$ érvényes	$\times$	
$\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee (q \to p)$ kielégíthető	$\times$	

2. (A, B, C mindegyike vagy lovag, azaz mindig igazat mond, vagy lókötő, azaz mindig hazudik.)

A: B lovag vagy C lókötő. B: Ha A lókötő, akkor C lovag. C: B lókötő.

Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak? (Minden jó válasz 2, minden rossz válasz -1 pontot ér. Ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, az 0 pont.)

	I	H
A lókötő		
Hármuk közül legalább kettő lovag.		
B lókötő		
C lókötő		

(8 pont)

Megoldás. $\{A \leftrightarrow (B \vee \neg C), B \leftrightarrow (\neg A \to C), C \leftrightarrow \neg B\}$-nek egyetlen modellje van, az, amiben A, B igaz, C hamis. Tehát a megoldás:

	I	H
A lókötő		$\times$
Hármuk közül legalább kettő lovag.	$\times$	
B lókötő		$\times$
C lókötő	$\times$	

Vagy (elemien): ha A lókötő, akkor B lókötő (tehát A és C is lókötő) és C lovag (mert igazat mond), vagyis ellentmondás van. Tehát A lovag. De akkor vagy B is lovag (és így C, aki ennek az ellenkezőjét állítja, lókötő), vagy C lókötő, és akkor B lovag (mert C azt hazudja, hogy nem). Vagyis mindenképpen arra jutunk, hogy B lovag, C pedig lókötő.

3. Legyen $\Sigma = \{p \to (q \vee \neg p), \neg(q \wedge r)\}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak? (Minden jó válasz 1, minden rossz válasz -0.5 pontot ér. Ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, az 0 pont.)

	I	H
$\Sigma \models (p \wedge q) \vee \neg r$		
$\Sigma \cup \{(\neg p \vee \neg q) \wedge r\}$ inkonzisztens		
$\Sigma \models (r \to q) \vee \neg p$		
$\Sigma \cup \{p \wedge r \wedge \neg q)\}$ inkonzisztens		

(4 pont)

Megoldás. Az első két állítás és a második két állítás is ekvivalens, mert $\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen, és mert ez utóbbi a teljességi tétel miatt ekvivalens azzal, hogy $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ inkonzisztens.

Az első (és így a második) állítás hamis, mert ha $\mathcal{M}$ olyan, hogy $\mathcal{M}(p) = \mathcal{M}(q) = 0$ és $\mathcal{M}(r) = 1$, akkor $\mathcal{M} \models \Sigma$ de $\mathcal{M} \not\models (p \wedge q) \vee \neg r$.

A harmadik (és így a negyedik) állítás igaz, mert ha $(r \to q) \vee \neg p$ hamis egy $\mathcal{M}$ modellben, akkor $\mathcal{M}(p) = 1 = M(r)$ és $\mathcal{M}(q) = 0$; de akkor $\mathcal{M} \not\models p \to (q \vee \neg p)$, és így $\mathcal{M} \not\models \Sigma$.

Tehát a megoldás:

	I	H
$\Sigma \models (p \wedge q) \vee \neg r$		$\times$
$\Sigma \cup \{(\neg p \vee \neg q) \wedge r\}$ inkonzisztens		$\times$
$\Sigma \models (r \to q) \vee \neg p$	$\times$	
$\Sigma \cup \{p \wedge r \wedge \neg q)\}$ inkonzisztens	$\times$	

4. Legyen $\Gamma = \{p \to (q \vee \neg p), \neg(q \wedge r), (\neg p \vee \neg q) \wedge r\}$, $\Delta = \{p \to (q \vee \neg p), \neg(q \wedge r), p, p \to r\}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak? (Minden jó válasz 1, minden rossz válasz -0.5 pontot ér. Ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, az 0 pont.)

	I	H
Γ kielégíthető		
Γ teljes		
Δ kielégíthető		
Δ teljes		

(4 pont)

Megoldás. Γ-nak pontosan egy modellje van ($\mathcal{M}(p) = \mathcal{M}(q) = 0$ és $\mathcal{M}(r) = 1$), ezért kielégíthető és teljes.

Δ-nak nincs modellje (azaz kielégíthetetlen, és így teljes), mert ha $\mathcal{M} \models \Delta$, akkor az első és a két utolsó Δ-beli formula miatt $\mathcal{M}$-ben p, q és r is igaz, de akkor $\mathcal{M} \not\models \neg(q \wedge r)$, és így $\mathcal{M} \not\models \Delta$. Tehát a megoldás:

	I	H
Γ kielégíthető	$\times$	
Γ teljes	$\times$	
Δ kielégíthető		$\times$
Δ teljes	$\times$	