Analízis

Valós számok:

Tulajdonságok:

1) $a + b \rightarrow$ bármely két valós szám összeadható, az összeg is valós szám lesz
2) $a + b = b + a \rightarrow$ az összeadás kommutatív
3) $(a + b) + c = a + (b + c) \rightarrow$ az összeadás asszociatív
4) $a + 0 = a \rightarrow$ a 0 összeadásnál mindent helyben hagy
5) (létezik $- a$) $a + (- a) = 0 \rightarrow$ minden számnak van ellentettje
6) $ab \rightarrow$ bármely két szám összeszorozható, a szorzat is valós szám lesz
7) $ab = ba \rightarrow$ a szorzás kommutatív
8) $(ab)c = a(bc) \rightarrow$ a szorzás asszociatív
9) $a*1 = a \rightarrow$ szorzásnál mindent helyben hegy
10) (létezik a^{-1}, $a \neq 0$) $a* a^{-1} = 1 \rightarrow$ minden számnak van inverze, kivéve a nullának
11) $a(b + c) = ab + ac \rightarrow$ disztributivitás
12) $a < b$; $a = b$; $a > b \rightarrow$ egyszerre csak egy állhat fenn
13) $a < b$ és $b < c \rightarrow a < c$
14) $a < b \rightarrow a + c < b + c$
15) $a< b$ és $c > 0 \rightarrow ac < bc$
16) Archimédeszi axióma:
    Minden a valós számra létezik olyan n egész szám, amire $a < n \rightarrow$ bármely valós számra létezik nála nagyobb egész szám
    Def: Az A halmaz (A egy valós részhalmaz) felülről korlátos, ha létezik olyan c, amelyre minden A-beli a -ra teljesül, hogy: $a < c$. Az ilyen tulajdonságú c az A halmaz felső korlátja
17) felülről korlátos számhalmaz felső korlátai között van legkisebb $c = \sup A \rightarrow$ supremum $\rightarrow$ legkisebb felső korlát.
18) Def: Alulról korlátos halmaz $\rightarrow$ létezik alsó korlát
    Alulról korlátos számhalmaz alsó korlátai között van legnagyobb $c = \inf A \rightarrow$ infimum lgnagyobb felső korlát

Komplex számok:

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

algebrai leírás: $z = a + ib$, ahol a a valós rész
b az képzetes (imaginárius) rész

exponenciális alak: $z = re^{i*\varphi}$, ahol r az origótól mért távolság

trigonometrikus alak: valós φ esetén $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i*\sin \varphi$. $e^{i\varphi}$ pont az egységsugarú körön a pozitív x tengelyen pozitív forgásirányon φ szög alatt látszik

$$e^{i\varphi 1} * e^{i\varphi 2} = e^{i(\varphi 1 + \varphi 2)}$$

$$Z^n = r^n*e^{in\varphi} = r^n * (\cos \varphi + i*\sin \varphi)^n$$

Síkvektorok:

$P_1 (x_1; y_1)$-ből $P_2 (x_2; y_2)$-be menő vektor: $\underline{v}$

$\underline{v} = <x_2 – x_1; y_2 – y_1>$

egységvektorok: $\underline{i} =<1; 0>$
$\underline{j} = <0; 1>$

$<v_1; v_2> = v_1*\underline{i} + v_2*\underline{j} \rightarrow v_1; v_2$ komponensű vektorok értelmezése

Skaláris szorzás:

$\underline{v} = \langle v_1; v_2\rangle$ és $w = \langle w_1; w_2\rangle$ skalár szorzata

$\underline{v}\cdot\underline{w} = v_1\cdot w_1 + v_2\cdot w_2$

ha $\underline{v} = \underline{w}$, $\underline{v}\cdot\underline{v} = |v|^2$

$\underline{v}\cdot\underline{w} = |v|*|w|*\cos\alpha$

ha $\underline{v}\cdot\underline{w} = 0 \leftrightarrow$ ha $\underline{v}$ és $\underline{w}$ merőleges egymásra. A 0 vektor minden vektorra merőleges

Egyenes egyenlete:

1) $ax + by = c$. Ha P_0 az egyenesen van $\rightarrow ax_0 + by_0 = c$. Tehát az egyenes egyenlete $a(x\text{-}x_0) + b(y\text{-}y_0) = 0$ Azaz $\underline{n} = \langle a;b\rangle$, $PP_0*\underline{n} = 0 \rightarrow$ az $\underline{n}$ merőleges az egyenesre, $\underline{v} = \langle b; -a\rangle$, merőleges $\underline{n}$-re, ezért az egyenes irányvektora
2) két egyenes hajlásszöge ≡ normálisaik szöge

   $\cos\alpha = (\underline{n}_1*\underline{n}_2)/|\underline{n}_1|*|\underline{n}_2|$

Térvektorok:

$\underline{v} = \langle v_1;v_2,v_3\rangle = v_1*\underline{i} + v_2*\underline{j} + v_3*\underline{k}$

$\underline{i} = \langle 1;0;0\rangle$

$\underline{j} = \langle 0;1;0\rangle$

$\underline{k} = \langle 0;0;1\rangle$

Skaláris szorzás:

$\underline{v}\cdot\underline{w} = v_1*w_1 + v_2*w_2 + v_3*w_3 = |\underline{v}|*|\underline{w}|*\cos\alpha$

$\underline{u}\cdot\underline{u} = |\underline{u}|^2$; $\quad \underline{u}\cdot\underline{v} = 0$, ha $\underline{u}$ merőleges $\underline{v}$-re

Tétel: $\underline{u}$ egyértelműen felbomlik egy $\underline{v}$-vel párhuzamos és egy $\underline{v}$-re merőleges komponens összegére

$\underline{u} = [(\underline{u}*\underline{v})/|\underline{v}^2|]*\underline{v} + \{\underline{u} - [(\underline{u}*\underline{v})/|\underline{v}^2|]*\underline{v}\}$

Az első komponens $[(\underline{u}*\underline{v})/|\underline{v}^2|]*\underline{v}$ az $\underline{u}$ merőleges vetülete $\underline{v}$ egyenesére, ennek hossza $|\underline{u}|*|\cos\alpha| = |\underline{u}\cdot\underline{v}|/|\underline{v}|$

Tétel: a determináns geometriai jelentése:

a) a 2x2-es determináns (<a;b>, <c;d>) az <a;b>,<c;d> vektorok által kifeszített paralelogramma előjeles területe. Akkor pozitív, ha <a;b>-ből pozitív forgásirányban jutunk el <c;d> irányhoz.

b) a 3x3-as determináns ($a = \langle a_1;a_2;a_3\rangle$, $b = \langle b_1;b_2;b_3\rangle$, $c = \langle c_1;c_2;c_3\rangle$) az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata, amely akkor pozitív, ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak

Vektori szorzás:

$\underline{v} \times \underline{w} = (v_2*w_3 - v_3*w_2)*\underline{i} - (v_1*w_3 - v_3*w_1)*\underline{j} + (v_1*w_2 + v_2*w_1)*\underline{k}$

Tétel: $\underline{u} \times \underline{v}$ geometriai jelentése:

$\underline{u} \times \underline{v}$ hossza az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ által kifeszített paralelogramma területe $\rightarrow |\underline{u}|*|\underline{v}|*\sin\alpha$, iránya, merőleges $\underline{u}$ és $\underline{v}$ síkjára úgy, hogy $\underline{u}$; $\underline{v}$ és $\underline{u} \times \underline{v}$ jobbrendszert alkosson

$\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{u} \times \underline{v}$

Térbeli egyenesek:

P_0 $(x_0;y_0;z_0)$ és $\underline{v} = \langle v_1;v_2;v_3\rangle$ iránnyal párhuzamos egyenes egyenlete egy paraméteres egyenletrendszer: $PP_0 = t*\underline{v}$, azaz (valós t esetén)

$x = x_0*tv_1$

$y = y_0*tv_2$

$z = z_0*tv_3$

t-t kifejezve

$t = (x\text{-}x_0/v_1) = (y\text{-}y_0/v_2) = (z\text{-}z_0/v_3)$

Ha például $v_2 = 0$, akkor $t = (x\text{-}x_0/v_1) = (y = y_0) = (z\text{-}z_0/v_3)$

Pont és egyenes távolsága:

$d = |PS|*\sin\alpha = |PS \times \underline{v}|/|\underline{v}|$

Sík egyenlete:

$ax + by + cz = d$ $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$

$P_0 (x_0; y_0; z_0)$ a síkon van $\rightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 = 0$

$P (x; y; z)$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$\underline{n} = \langle a; b; c \rangle \rightarrow \underline{n} * P_0P = 0$

$\underline{n}$ a síkbeli összes irányra merőleges → a sík normálvektora

Két sík metszetegyenese:

a metszetegyenes mindkét síkban benne lévő irány → mindkét normálvektorra merőleges

$\underline{v}$ merőleges $\underline{n}_1$; $\underline{n}_2$ → $\underline{v}$ párhuzamos $\underline{n}_1$ x $\underline{n}_2$ -vel, ha a két sík párhuzamos, akkor a normálvektorjaik komponensei megegyeznek

Pont és sík távolsága:

$d = |PS| * \cos \alpha = |PS * \underline{n}| / |\underline{n}|$

Számsorozat:

Def: az$\{a_n\}$ sorozat a valós L határértékhez konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N természetes szám, hogy minden $n \geq N$ -re $|a_n - L| < \varepsilon$. „a sorozat nagyon nagy indexű tagjai nagyon közel vannak a L-hez"

Jelölés: $\lim a_n = L$ vagy $a_n \rightarrow L$

ε hibakorlát, N az ε hibakorláthoz tartozó küszöbindex → nem egyértelmű (ha N jó, akkor N+1; N+2; … is jó)

Def: Ha nincs olyan valós L, hogy $a_n \rightarrow L$, akkor $\{a_n\}$ sorozat divergens

Def: Végtelenhez divergens sorozatok $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} a_n = +\infty$ (ill. $a_n \rightarrow +\infty$) ha minden $K > 0$ -hoz létezik olyan N, hogy minden $n \geq N$ -re $a_n > K$

Def: végtelenhez divergens sorozatok $\lim a_n = -\infty$ (ill. $a_n \rightarrow -\infty$), ha minden $K > 0$ -hoz létezik olyan N, hogy minden $n \geq N$ -re $a_n < -K$

Részsorozat: az eredeti sorozatból valamilyen szabály szerint kivett elemek

$1 \leq n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ esetén az

$\{a_{nk}\}_{k=1} = \{a_{n1}; a_{n2}; \ldots\}$ sorozat a_n-nek részsorozata

Tétel: a részsorozat határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével, tehát

ha $a_n \rightarrow L$, akkor bármely részsorozatra a $a_{nk} \rightarrow L$. Ez igaz $L = +\infty$ és $L= -\infty$ -re is.

(A részsorozat nagy indexű elemei közel vannak L-hez)

Következmény: Ha egy sorozatnak két különböző értékben konvergens részsorozata van, akkor az eredeti sorozat divergens

Tétel: Határérték és alapműveletek

Ha $a_n \rightarrow A$

$b_n \rightarrow B$ (valós A;B esetén)

$c * a_n \rightarrow c * A$

$a_n +/- b_n \rightarrow A +/- B$ (összeg határértéke egyenlő a határértékek összegével)

$a_n * b_n \rightarrow A * B$ (szorzat határértéke egyenlő a határértékek szorzatával)

ha $B \neq 0$ $a_n / b_n = A/B$ (hányados határértéke egyenlő a határértékek hányadosával)

A határérték és a sorozat közti művelet felcserélhető

Kiegészítés: Ha A; B vagy mindkettő végtelen, akkor a szabályok érvényesek maradnak kivéve a $\infty - \infty$; $0*\infty$; ∞/∞ -t, ekkor határozatlan a szituáció

Tétel:

a') Ha $a_n \to +\infty$ és $c > 0$, akkor $c*a_n \to +\infty$

$+\infty$	$c < 0$	$c*a_n \to -\infty$
$-\infty$	$c > 0$	$c*a_n \to -\infty$
$-\infty$	$c < 0$	$c*a_n \to +\infty$

ha $a_n \to +\infty$ és $b_n \to B \neq -\infty$, akkor $a_n + b_n \to +\infty$

$a_n \to -\infty$ és $b_n \to B \neq +\infty$, akkor $a_n + b_n \to -\infty$

b') ha $a_n \to +\infty$ és $b_n \to B > 0$, akkor $a_n * b_n \to +\infty$

$-\infty$	> 0	$-\infty$
$-\infty$	< 0	$+\infty$
$+\infty$	< 0	$-\infty$

c') csak $1/b_n$-re

Ha $b_n \to +\infty$, akkor $1/b_n \to 0$

$-\infty$ $\quad 1/b_n \to 0$

ha $b_n > 0$; $b_n \to 0$ $\quad 1/b_n \to +\infty$

< 0 $\quad -\infty$

Tétel: Rendőrszabály

Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ minden n-re és ha $a_n \to L$ és $c_n \to L$, akkor $b_n \to L$

Spec: Ha $a_n \to +\infty$ és $a_n \leq b_n$, akkor $b_n \to +\infty$

ha $c_n \to -\infty$ és $d_n \leq c_n$, akkor $d_n \to -\infty$

A rendőrszabály alkalmazható:

$c*a_n \to c*A$

$a_n +/- b_n \to A +/- B$

$a_n * b_n \to A*B$

és $B \neq 0$ esetén1 $\quad a_n / b_n = A/B$ (ha $B \neq 0$, akkor $b_n \neq 0$, egy bizonyos indextől kezdve $n \geq n_0$ -ra, véges számú olyan hányados lesz, ami nem értelmezhető, mert $b_n = 0$)

Tétel: Bernoulli-egyenlőtlenség

$x>-1 \to (1+x)^n \geq 1+nx \qquad n\geq 1$

Tétel: $a_n \to A$; $a_n \geq 0$ esetén $\sqrt{(a_n)} \to \sqrt{(A)}$; $\sqrt[k]{(a_n)} \to \sqrt[k]{(A)} \qquad k = 1;2;\ldots$

($\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x}$;...; $\sqrt[k]{x}$ függvények folytonosak)

<u>Nevezetes határértékek:</u>

1. $\sqrt[n]{n} \to 1$ $\qquad \sqrt[n]{(1/n)} \to 1$ (a gyökvonás minden számot egy felé húz, ez fokozottan igaz ha nagyobb a gyökkitevő, 1-nél nagyobb számokat csökkenti, a kisebbeket növeli)
2. Ha $a > 0$, akkor $\quad \sqrt[n]{a} \to 1$
3. $q^n \to +\infty \quad$ ha $q > 1$
   $\to 1 \quad$ ha $q = 1$
   $\to 0 \quad$ ha $|q| < 1$
   divergens, ha $q \leq -1$
4. $a^n/n! \to 0$
5. $n^k/a^n \to 0 \qquad$ ha $a>1$; $k = 0;1;2;\ldots$
6. $(\log_a n)/n \qquad a > 0$; $a \neq 1$

Def: $\{a_n\}$ monoton növekvő, ha $a_n \leq a_{n+1}$ minden n-re. Szig mon nő, ha $a_n < a_{n+1}$ minden n-re.
Csökkenés hasonlóan

Tétel: Monoton sorozatnak van határértéke, azaz:

a) Ha $\{a_n\}$ mon. növő és felülről korlátos, akkor a sorozat határértéke $a_n \to \sup\{a_1; a_2; \ldots\}$

b) Ha $\{a_n\}$ mon növő és felülről nem korlátos, akkor $a_n \to +\infty$

a') Ha $\{a_n\}$ csökken és alulról korlátos, akkor van határértéke: $a_n \to \inf\{a_1; a_2; \ldots\}$

b') Ha $\{a_n\}$ csökken és alulról nem korlátos, akkor van határértéke: $a_n \to -\infty$

Def: $\lim(1 + 1/n)^n = \mathbf{e} = 2{,}71...$

Tétel: $\lim (1 - 1/n)^n = 1/\mathbf{e}$

Tétel: $(1 + c/n)^n \to \mathbf{e}^c$

Függvények:

Minden $x \in A$-hoz $(A \subset R)$ tartozik egy f(x) valós szám, amire f:A → valós számok (minden A-beli x helyhez tartozik egy valós f(x) érték)

D(f) = A → értelmezési tartomány (ha csak képlet van, D(f) azokból az x-ekből áll, amire a képlet értelmes)

R(f) = {f(x): $x \in A$} → értékkészlet

Az f(x) függvény:

a) periodikus p periódussal, ha f(x+p) = f(x) (minden x-re, p>0)

b) páros, ha f(-x) = f(x) (minden x-re)

c) páratlan, ha f(-x) = -f(x) (minden x-re)

d) monoton nő (csökken), ha x < y; x;y $\in$ D(f) esetén f(x) $\leq$ f(y) (f(x) $\geq$ f(y))

e) szig mon nő (csökken), ha x;y $\in$ D(f) esetén f(x) < f(y) (f(x) > f(y))

f) konvex, ha bármely x < y -ra a grafikonja az (x; f(x)) és (y; f(y)) pontok közötti szakasz alatt tart

g) konkáv, ha bármely x < y -ra a grafikonja az (x; f(x)) és (y; f(y)) pontok közötti szakasz felett tart

Az f(x) grafikonja: G(f) = {<x; f(x)>; x $\in$ D(f)}
Az f(x) függvény injektív, ha x ≠ y; f(x) ≠ f(y) (ha különböző értékeket különböző helyeken képez)
Injektív függvény esetén az R(f) értékkészleten definiálható az inverzfüggvény:

f^{-1}: R(f) → D(f)$\subset R$

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ (az x-ből y lesz)

Megj: az inverz függvény grafikonja az eredeti függvény grafikonból az y = x egyenesre való tükrözéskor keletkezik

Összetett (közvetett) függvény:

g°f : „g kör f" fontos a sorrend

D(g°f) = {x: x $\in$ D(f) és f(x)$\in$D(g)}

(g°f)(x) = g(f(x))

Alapműveletek függvényekkel:

c * f → D(f)

f +/- g → D(f) ∩ D(g)

f * g → D(f) ∩ D(g)

f/g → D(f) ∩ D(g) ∩ {x: g(x) ≠ 0}

Függvény határérték:

Def: Legyen $x_0 \in (a;b)$

Legyen $f(x)$ értelmezve $(a;b)\setminus\{x_0\}$

Az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli határértéke a $L \in R$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik egy olyan $\delta > 0$, hogy $x \in (a;b)$; $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Ha x nagyon közel van x_0-hoz, de nem egyenlő vele, akkor f(x) nagyon közel van L-hez)

Jelölés: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ $\quad \lim\limits_{x_0} f = L$ $\quad f(x) \to L$, ha $x \to x_0$; $x \neq x_0$

Tétel: legyen $x_0 \in (a;b)$, $f(x)$ értelmezett $(a;b) \setminus \{x_0\}$ -on. Akkor $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \leftrightarrow$ bármely $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$; $x_n \in (a;b)$ sorozatra $f(x_n) \to L$ (a függvényértékek közelednek L-hez, ha a sorozat közeledik x_0-hoz

Tétel: Függvényhatárértékek és alapműveletek

Ha $\lim\limits_{x_0} f_1 = L_1$, $\lim\limits_{x_0} f_2 = L_2$, akkor $\lim\limits_{x_0} c*f_1 = c*L_1$; $\lim\limits_{x_0} (f_1 +/- f_2) = L_1 +/- L_2$; $\lim\limits_{x_0} (f_1*f_2) = L_1*L_2$; és $L_2 \neq 0$ esetén $\lim\limits_{x_0} (f_1/f_2) = L_1/L_2 \to$ Azt is állítjuk, ha $L_2 \neq 0$, akkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $f_2(x) \neq 0$, tehát $f_1(x)/f_2(x)$ értelmes minden ilyen x-re

Tétel: Rendőrszabály

Ha $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = L$ és létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, minden $0 < |x - x_0| < \delta$ -ra, akkor a közrefogott g függvény is $\lim\limits_{x_0} g = L$

Tétel: $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} (\sin x)/x = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos x)/x = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos x)/x^2 = ½$ $\quad (1 - \cos 2\alpha)/2 = \sin^2 \alpha$

$\lim\limits_{x\to a} x = a$ definíció $\delta = \varepsilon$ -nál

$\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$ a polinom határértéke ugyanaz, mint a behelyettesítési érték

Def: Racionális tört függvény két polinom hányadosa

$\lim\limits_{x\to a} p(x)/q(x) = p(a)/q(a)$ ha $q \neq 0$

$\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ $\quad \lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a}$ $\quad$ ha $a > 0$, $k = 2;3; ...$

$\lim\limits_{x\to a} x^{n/k} = a^{n/k}$ ha $a >0$

$\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$ $\quad \lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

Féloldali határérték:

Legyen f(x) értelmezett (a; a+r) szakaszon $r > 0$-ra. Akkor $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = L$, azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $a < x < a + \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. „ha $x \neq a$, de jobbról nagyon megközelítheti x az a-t, akkor f(x) is nagyon megközelíti L-t" → jobboldali határérték

Def: Ha f(x) értelmezett (a-r; a)-n, akkor $\lim_{x\to a-} f(x) = L$ jelentése, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $a - \delta < x < a$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$

Tétel: $\lim_{x\to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x) = L$ és $\lim_{x\to a-} f(x) = L$

<u>Végtelen határérték:</u>

Def: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, ha minden K>0-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - a| < \delta$ esetén $f(x) > K$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, ha minden K>0-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - a| < \delta$ esetén $f(x) < K$

Pl: $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$

Def: $\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$, ha minden K>0-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) > K$ $(f(x) < -K)$

$\text{im}_{x\to a-} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$, ha minden K>0-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $a - \delta < x < a$ esetén $f(x) > K$ $(f(x) < -K)$

<u>A végtelenben vett határérték:</u>

Def: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $K > 0$, hogy $x > K$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$

f(x) minden nagyon nagy számra ($+\infty$ -be menő félegyenesen) értelmezve van

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $K > 0$, hogy $x < -K$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$

<u>Ha a végtelenben vett határérték végtelen:</u>

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$ azt jelenti, hogy minden $K > 0$-hoz van olyan M>0, hogy x>M esetén $f(x) > K$ $(f(x) < -K)$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$ azt jelenti, hogy minden $K > 0$-hoz van olyan M>0, hogy x<-M esetén $f(x) > K$ $(f(x) < -K)$

Tétel: valamennyi határértékre érvényes:

a) átviteli elv → függvény és sorozat határértékre
b) Rendőrszabály
c) határérték és alapműveletek felcserélhetősége

Def: $x_0 \in R$ környezete:

Bármely $x_0 \in (a;b)$ nyílt intervallum
$+\infty$ környezete bármely $[K; +\infty)$ félegyenes
$-\infty$ környezete bármely $(-\infty; K]$ félegyenes
x_0 jobboldali környezete bármely $[x_0; x_{0+r})$ balról zárt intervallum
x_0 baloldali környezete bármely $(x_{0-r}; x_0]$ jobbról zárt intervallum

Def: Legyen x_0 és L valós szám vagy $+\infty$ és $-\infty$. Akkor $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ akkor és csak akkor, ha az L bármely K_L környezetében megadható x_0-nak olyan K_{x0} környezete, hogy $x \in K_{x0}$; $x \neq x_0$ esetén $f(x) \in K_L$ (minden K_L-hez létezik K_{x0})

Ha féloldali határérték:

$\lim_{x \to x_0+(-)} f(x) = L$ definíciója ugyanaz, csak ott K_{x0} jobboldali (baloldali) környezete

Folytonosság:

Def: f(x) folytonos az x_0-ban, ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ „a határérték ugyanaz, mint a behelyettesítési érték ugyanabban a pontban”

- f(x) jobbról (balról) folytonos x_0-ban, ha $\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$)
- f(x) folytonos [a;b]-n, ha a-ban jobbról, b-ben balról folytonos és minden $x \in (a;b)$-ben folytonos (tehát az intervallum minden pontjában folytonos)

Megjegyzés:

1) Ha f(x) folytonos x_0-ban, akkor értelmezett x_0 egy környezetében
   Ha f(x) jobbról (balról) folytonos x_0-ban, akkor értelmezett x_0 egy jobboldali (baloldali) környezetében
2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \to x_0} x)$ „folytonos függvény, ha felcserélhető a határérték képzéssel”
   f(x) folytonos x_0-ban akkor és csak akkor, ha minden $x_n \to x_0$ sorozatra $f(x_n) \to f(x_0)$ „a határérték kép a kép határértéke”
3) f(x) folytonos x_0-ban akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ („$f(x_0)$ bármely $K_{f(x0)}$ környezetében van x_0-nak olyan K_{x0} környezete, hogy $x \in K_{x0}$ esetén $f(x) \in K_{f(x0)}$ (azaz $f(K_{x0} \subset K_{f(x0)})$)

Tétel: Ha f(x) és g(x) folytonos x_0-ban, akkor c*f(x); f(x) +/- g(x); f(x)*g(x) is folytonos. Illetve $g(x) \neq 0$ esetén f(x)/g(x) is folytonos x_0-ban
Féloldali illetve intervallumbeli folytonosság hasonlóan

Tétel: Közvetett függvény folytonossága
f(x) folytonos x_0-ban és g(x) folytonos $f(x_0)$-ban, akkor a g°f függvény folytonos x_0-ban.
Ha $x \to x_0$, akkor $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$, mert g folytonos $f(x_0)$-ban és $f(x_n) \to f(x_0)$

Tétel: inverz függvény folytonossága

a) Ha f(x) folytonos és szig mon nő [a;b]-n, akkor az $f^{-1}:[f(b); f(a)] \to [a;b]$ is folytonos (és szig mon nő)
b) Ha f(x) folytonos és szig mon csökkenő [a;b]-n, akkor $f^{-1}:[f(b); f(a)] \to [a;b]$ is folytonos (és szig mon csökkenő)

Példák folytonos függvényekre:

- Konstans függvény folytonos
- f(x) = x folytonos R-en, mert $x_n \to x_0$-hoz, $f(x_n) \to f(x_0)$
- sin x; cos x folytonosak R-en, azaz $\sin(x_0) = \lim_{x \to x_0} \sin x$; $\cos(x_0) = \lim_{x \to x_0} \cos x$
  - köv: tan x folytonos, ha $x \neq (k+1/2)\pi$
  - cot x folytonos, ha $x \neq k\pi$
- |x| folytonos R-en → ha f(x) folytonos x_0-ban, akkor $|f(x_0)|$ is az
- $(x*\sin x)/(x^2+2)$ folytonos R-en
- $\sqrt[n]{x}$ folytonos $x \geq 0$ félegyenesen illetve páratlan n esetén folytonos az egész számegyenesen

Irracionális kitevős hatvány:

Tétel: Legyen $x > 0$; $a \in R$, $r_n \in Q$, $r_n \to a$
Akkor $\{x^{rn}\}$sorozat konvergens és határértéke független az $r_n \to a$ sorozat megválasztásától.
Jelölés: $x^a = \lim x^{rn}$
Az így definiált x_a függvényre teljesülő tulajdonságok:

a) x^a folytonos $x > 0$ félegyenesen

b) x^a szig mon nő, ha $a > 0$, csökken, ha $a < 0$

c) $x^{a1+a2} = x^{a1} * x^{a2}$; $x^{a1*a2} = (x^{a1})^{a2}$; $(x_1 * x_2)^a = x_1^a * x_2^a$

Tétel: Exponenciális függvény: a^x

Ha $a > 0$, akkor a^x folytonos az egész számegyenesen, szig mon nő, ha $a > 1$

szig mon csökken, ha $a < 1$

Tétel: Logaritmus függvény

Legyen $a > 0$; $a \neq 1$, akkor $\log_a x$ az x^a inverz függvénye, ezért $\log_a x$ folytonos és szig mon nő, ha $a > 1$, szig mon csökken, ha $0 < a < 1$

Spec: $\log_{\mathbf{e}} x = \ln x$ (természetes logaritmus)

Nevezetes határértékek:

$\lim_{x\to+\infty} x/a^x = 0$ ha $a > 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} P(x)/a^x = 0$, ha $a > 1$

$n/a^n \to 0$ $\qquad$ $n^k/a^n \to 0$

$\lim_{x\to0} (1+x)^x = \mathbf{e}$ $\qquad$ $\lim_{x\to0} (\log(1+x))/x = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to0} (e^x-1)/x = 1$

Szakadási helyek osztályozása:

Def: Ha f nem folytonos x_0-ban, de értelmezve van x_0 egy környezetében (kivéve esetleg az x_0 pontot), akkor f(x)-nek x_0-ban szakadása van

x_0 -beli szakadás

a) megszűntethető, ha van véges határértéke x_0 pontban

b) ugrás, ha léteznek féloldali határértékek, ezek végesek, de nem egyenlők, tehát létezik $\lim_{x\to x_0} f(x)$ és $\lim_{x\to x_0-} f(x)$

c) másodfokú szakadás, ha $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ és $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ közül legalább az egyik nem létezik, vagy végtelen

Tétel: Ha f(x) monoton nő c egy környezetében, akkor c-ben léteznek a féloldali határértékek

$\lim_{x\to c-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c+} f(x)$

Ha f(x) monoton csökkent

$\lim_{x\to c-} f(x) \geq f(c) \geq \lim_{x\to c+} f(x)$

Köv: Monoton függvények szakadási helye csak szakadás lehet (megszüntethető és másodfajú szakadása nem lehet)

Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai:

Def: $f \in C\,[a;b]$ jelentése: f folytonos a korlátos [a;b] szakaszon

Tétel Ha $f \in C[a;b]$, akkor

1) f(x) korlátos (Weierstrass 1. tétele)

2) f(x) felveszi maximumát és minimumát, tehát létezik legnagyobb és legkisebb függvény érték (Weierstrass 2. tétele)

3) Az f(a) és f(b) közötti minden érték is függvényérték (Bolzano tétele)

Megj: Ha $f \in C\,[a;b]$, akkor az R(f) értékkészlet is korlátos zárt intervallumon

Ha az intervallum (ahol f folytonos) nem korlátos, vagy nem zárt, akkor 1); 2) nem igaz

Differenciál számítás:

Def: Legyen f(x) értelmezett a egy környezetében

Ha létezik a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ véges határérték, akkor f(x) differenciálható a-ban, és a-beli differenciálhányadosa (deriváltja) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Egyéb jelölés: df/dx; d/dx f

Pl. Egyenes deriváltja a meredeksége

Def: (f(x) – f(a))/(x-a) (különbségi hányados) = tan α → iránytangens ≡ az egyenes meredeksége

A derivált $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \tan \alpha$. tehát ha f(x) differenciálható a-ban, akkor <a;f(a)> és az <x;f(x)> pontokon át rajzolt egyeneseknek van egy határhelyzete → f(x) 'a' ponthoz tartozó érintőegyenese. Ennek meredeksége f '(a)

y = f(a) + f '(a)(x-a) → az érintőegyenes egyenlete

$\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x)/(x-a) = 0$ → az egyenes közelít egy határhelyzethez, ami érintőegyenes

Tétel: Ha f(x) differenciálható a-ban és az ε (x) függvényt az f(x) = f(a) + f '(a)(x-a) + ε (x) egyenlőséggel definiáljuk, akkor $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x)/(x-a) = 0$

Megj.: ε (x) sokkal kisebb (x-a)-nál, ha x közel van a-hoz, akkor f(x) ≈ f(a) + f '(a)(x-a) → a hiba (x-a)-nál sokkal kisebb

Az f(x) grafikonját <a; f(a)> kis környezetében kinagyítva majdnem egyenest látunk, f'(a) meredekséggel. A függvény belesimul az érintőegyenesébe

Tétel: Ha van olyan A konstans, hogy f(x) = f(a) + A(x-a) + ε (x)-vel definiált ε (x) függvényre $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x)/(x-a) = 0$, akkor f(x) differenciálható a-ban és f '(a) = A

töréspontban nincs derivált, a differenciálható függvénynek folyamatosan kell haladnia

Def: Féloldali derivált

$f'_{+}(a) = \lim\limits_{x \to a+} (f(x) - f(a))/(x-a)$ → jobb oldali derivált

$f'_{-}(a) = \lim\limits_{x \to a-} (f(x) - f(a))/(x-a)$ → bal oldali derivált

Tétel: f(x) differenciálható a-ban, ha jobbról és balról vett deriváltja létezik és egyenlő

töréspont akkor van, ha a féloldali deriváltak léteznek, de nem egyenlők

Ha f(x) jobbról ill. balról differenciálható a-ban, akkor a korábban definiált ε (x) függvényre $\lim\limits_{x \to a+} \varepsilon(x)/(x-a) = 0$ $(\lim\limits_{x \to a+} \varepsilon(x)/(x-a) = 0)$

Tétel: A differenciálható függvény folytonos

Ha f(x) differenciálható (jobbról- ill. balról differenciálható) a-ban, akkor folytonos (jobbról ill. balról folytonos) a-ban

f(x) = |x| folytonos, de 0-ban nem differenciálható

Differenciálhatóság $\underset{\not\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{\text{—}}}$ folytonosság

<u>A deriválás technikája:</u>

konstans függvény deriváltja 0

Tétel: összeg, szorzat, hányados deriválása

Ha f(x) és g(x) differenciálható x-ben, akkor c*f(x); f(x) +/- g(x); f(x)*g(x) és g ≠ 0 esetén f(x)/g(x) is deriválható a-ban

(c*f)'(a) = c*f '(a)
(f +/- g)'(a) = f '(a) +/- g '(a)
(f*g)'(a) = f '(a)*g(a) + f(a)*g '(a)
(f/g)'(a) = [f '(a)*g(a) – f(a)*g '(a)]/g^2(a)

f(x) = x deriváltja bármely pontban 1

d/d(x) $x^n = n*x^{n-1}$

d/d(x) sin x = cos x   d/d(x) cos x = - sin x

d/d(x) tan x = 1/$\cos^2$ x   ha x ≠ (k + ½)*π

d/d(x) cot x = -1/$\sin^2$ x   ha x ≠ k*π

d/d(x) ln x = 1/x   x > 0

d/d(x) $\log_a x$ = 1/(x*ln a)   ha x > 0 és 0 < a ≠ 1

d/d(x) (g°f)(a) = g '(f(a))*f '(a)   (a külső függvény deriváltja f(a) helyen, szorozva belső függvény deriváltja)

d/d(x) ln (sin x) = cot x

Tétel: Inverz függvény deriválási szabálya

Ha f(x) szig mon (a;b)-n, $x_0 \in$ (a;b)-ben differenciálható és f '(x_0) ≠ 0, akkor f^{-1} is differenciálható

$y_0 = f(x_0)$-ban és $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$, ahol $f(x_0) = y_0$

Mivel $x_0 = f^{-1}(y_0)$, ezért $(f^{-1})'(y_0) = 1/[f'(f^{-1}(y_0))]$ → $f^{-1} = 1/(f' \circ f^{-1})$

d/d(x) $\mathbf{e}^x = \mathbf{e}^x$ → deriváltja saját maga

d/d(x) $a^x = a^x$*ln a   ha a > 0

d/d(x) $x^\alpha = \alpha * x^{\alpha-1}$ ha x > 0 és $\alpha \in R$

d/d(x) sin (cos x) = cos (cos x) * (- sin x)