ANALÍZIS(1) — Mérnök Informatikus szak — **II. ZÁRTHELYI** β **változat** — **2009. november 17.** — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (16 pont)

a) Ismertesse az átviteli elvet!

$$\lim_{x\to\infty} \sin(3x^2) = ? \qquad \text{Állítását bizonyítsa be!}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}\sin(3x^2) = ?$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\sin(3x^2) = ?$

a.) L. jegyzet! 3 (Átviteli elv)

$3x^2 = n\pi$: $x_n^{(1)} = \sqrt{n\frac{\pi}{3}} \to \infty$: $f(x_n^{(1)}) \to 0$

$f(x) = \sin 3x^2$

$3x^2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$: $x_n^{(2)} = \sqrt{\frac{\pi}{6} + 2n\frac{\pi}{3}} \to \infty$: $f(x_n^{(2)}) \to 1 \neq 0$

$\xRightarrow{\text{átviteli elv}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \sin 3x^2 \nexists$ 6

b.) $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\downarrow 0} \underbrace{\sin 3x^2}_{\text{korl.}} = 0$ 3

c.) $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 3x^2}{x^2\cdot 3}}_{\downarrow 1} \cdot 3 = 3$ 4

2. feladat (12 pont)

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 \ \operatorname{tg} 3x}\,, \qquad 3x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

a) $f'(x) = ?$, ha $x \neq 0$

b) A derivált definíciója alapján határozza meg $f'(0)$ értékét!

a) $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 \operatorname{tg} 3x\right)^{-\frac{2}{3}} \underbrace{\left(x^2 \cdot \operatorname{tg} 3x\right)'}$

$= \left(2x \operatorname{tg} 3x + x^2 \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3\right)$ 4

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ 2 $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h^2 \operatorname{tg} 3h} - 0}{h}$ 1 $=$

$= \lim\limits_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{\cancel{h^2}}{\cancel{h^2}} \underbrace{\frac{\sin 3h}{h\cdot 3}}_{\downarrow 1} \frac{3}{\cos 3h}} = \sqrt[3]{3}$ 5

an1z20911171

3. feladat (16 pont)

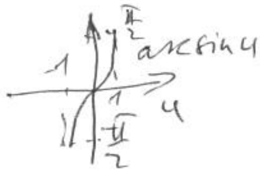
$$f(x) = 3 \arcsin(1-5x) + 2\pi$$

a) $D_f = ?$, $R_f = ?$, $f'(x) = ?$, $D_{f'} = ?$

b) Indokolja meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze!
$f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

a.) $-1 \le 1-5x \le 1 \Rightarrow -2 \le -5x \le 0 \Rightarrow \frac{2}{5} \ge x \ge 0$

$D_f = [0, \frac{2}{5}]$ 2



$\arcsin(1-5x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$3\arcsin(1-5x) \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$R_f = [\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$ 2

$f'(x) = 3 \frac{1}{\sqrt{1-(1-5x)^2}} (-5)$ 3 $\qquad D_{f'} = (0, \frac{2}{5})$ 1

b.) $f^{-1}(x) < 0$ $(0, \frac{2}{5})$-on és f folyt. $[0, \frac{2}{5}]$-on
$\Rightarrow f$ szig. mon. csökken D_f-en $\Rightarrow \exists f^{-1}$ D_f-en 2

$y = 3\arcsin(1-5x) + 2\pi$

$\frac{y-2\pi}{3} = \arcsin(1-5x)$

$1-5x = \sin\frac{y-2\pi}{3}$

$5x = 1 - \sin\frac{y-2\pi}{3}$

$x = \frac{1}{5}\left(1 - \sin\frac{y-2\pi}{3}\right)$ $\qquad x \leftrightarrow y$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}\left(1 - \sin\frac{x-2\pi}{3}\right)$ 4

$\left.\begin{array}{l} D_{f^{-1}} = R_f = [\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}] \\ R_{f^{-1}} = D_f = [0, \frac{2}{5}] \end{array}\right\}$ 2

anlz2 091117/2

4. feladat (19 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{arsh}\,(2x^2)}{\text{arctg}\,(5x^2)} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\,e^{6x} - 4\,e^{5x}}{2\,e^{-4x} + 7\,e^{6x}} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0+0} \sqrt[4]{x}\, \ln x^6 = ?$

a.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{arsh}\, 2x^2}{\text{arctg}\, 5x^2}$ $\frac{0}{0}$ (1) $\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+(2x^2)^2}}\,4\cdot x}{\frac{1}{1+(5x^2)^2}\,10\,x}$ (4) $\underbrace{\frac{x}{x}}_{=1}$ $= \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$ (2)

b.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{6\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}}$ $\frac{\infty}{\infty}$ (2) $\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{6\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{4}\,x^{-5/4}}$ (3) $= \lim\limits_{x\to 0+0} -24\,x^{(-1+5/4)>0} = 0$ (2)

c.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{e^{6x}}{e^{6x}}}_{=1} \dfrac{3-4e^{-x}}{2\,e^{-10x}+7}$ (3) $= \dfrac{3-0}{0+7} = \dfrac{3}{7}$ (2)

5. feladat (14 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \text{arctg}\,\dfrac{x-4}{3-x}, & \text{ha } x < 3 \\ \text{ch}^2\,(x-3), & \text{ha } x \geq 3 \end{cases}$$

a) Hol és milyen szakadása van az f függvénynek?
(A kétoldali határértékek kiszámítása után döntsön!)

Differenciálható-e a függvény $x = 3$-ban?

b) Írja fel a deriváltfüggvényt, ahol az létezik!

a) f folyt., ha $x \neq 3$, mert folytonos függvények összetétele

$f(3-0) = \lim\limits_{x\to 3-0} \text{arctg}\left(\dfrac{\overset{\to -1}{x-4}}{\underset{\to +0}{3-x}}\right) \to -\infty$ $= -\dfrac{\pi}{2}$ (3)

$f(3+0) = f(3) = \text{ch}^2\,0 = 1 \neq f(3-0)$ (1) : véges ugrása van $x=3$-ban f-nek

$\Rightarrow f$ nem folytonos $x=3$-ban (1) $\Rightarrow f'(3) \nexists$ (nem teljesül a szükséges felt.) (2)

b.)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\frac{x-4}{3-x}\right)^2}\,\dfrac{1\cdot(3-x)-(x-4)\cdot(-1)}{(3-x)^2}, & \text{ha } x < 3 \quad (4) \\ 2\,\text{ch}(x-3)\cdot\text{sh}(x-3), & \text{ha } x > 3 \quad (3) \end{cases}$$

an1z2 091117/3.

6. feladat (12 pont)

$$f(x) = (1 + \operatorname{ch} 5x)^{1+x/4}$$

a) $f'(x) = ?$
b) Írja fel az $x = 0$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

$f(x) = e^{(1+x/4)\ln(1+\operatorname{ch}5x)}$ (2)

a.) $f'(x) = (1+\operatorname{ch}5x)^{1+\frac{x}{4}} \cdot \underbrace{\left(\left(1+\frac{x}{4}\right)\ln(1+\operatorname{ch}5x)\right)'}$ (3)

$\left(\frac{1}{4}\ln(1+\operatorname{ch}5x) + \left(1+\frac{x}{4}\right)\frac{\operatorname{sh}5x \cdot 5}{1+\operatorname{ch}5x}\right)$ (3)

b.) $y_e = f(0) + f'(0)(x-0)$ (2) $\quad f(0) = 2\ ;\ f'(0) = 2\cdot\frac{1}{4}\ln 2$

$y_e = 2 + \frac{1}{2}\ln 2\, x$ (2)

7. feladat (11 pont)

Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken az

$$f(x) = \frac{x-3}{(x+5)^3}$$

szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!
Van-e lokális szélsőértéke a függvénynek? Ha igen, milyen jellegű?

$x \neq -5$: $f'(x) = \frac{1\cdot(x+5)^3 - (x-3)\cdot 3(x+5)^2}{(x+5)^6} = \frac{x+5-3(x-3)}{(x+5)^4} =$ (3)

$= \frac{2(7-x)}{(x+5)^4}$ (2)

$(x+5)^4 > 0$

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,7)$	7	$(7,\infty)$
f'	+	$\nexists$	+		−
f	↗	szak. h.	↗	lok. max	↘

(2)

szig. mon. nő: $(-\infty,-5)$ ill $(-5,7)$ intervallumokon (2)
szig. mon. csökken: $(7,\infty)$-en (1)
lok. max van $x=7$-ben: (1)

an1z2 091117/4.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

$$f(x) = \frac{(x^2-9)}{(x-2)^2\,(x^2+9)\,\sqrt{x^2-6x+9}}$$

Adja meg a függvény értelmezési tartományát!

Hol és milyen szakadása van a függvénynek?

(A megfelelő határértékek kiszámítása után válaszoljon!)

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}\,\frac{x+3}{x^2+9}\,\frac{x-3}{|x-3|} \qquad D_f:\ x \neq 2,\ x \neq 3 \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{(x-2)^2}_{\to +0}}}_{\to +\infty}\ \underbrace{\frac{x+3}{x^2+9}}_{\to \frac{5}{13}}\ \underbrace{\frac{x-3}{|x-3|}}_{\to -1} = -\infty \ : \text{másodfajú szak.} \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to 3+0} \underbrace{\frac{x-3}{x-3}}_{\to 1}\ \underbrace{\frac{1}{(x-2)^2}}_{\to 1}\ \underbrace{\frac{x+3}{x^2+9}}_{\to \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 3-0} \underbrace{\frac{x-3}{-(x-3)}}_{\to -1}\ \underbrace{\frac{1}{(x-2)^2}}_{\to 1}\ \underbrace{\frac{x+3}{x^2+9}}_{\to \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$$

véges ugrás van $x=3$-ban (5)

9. feladat (10 pont)

$$f(x) = \ln(2+3x^2)$$

Hol konvex, hol konkáv az f függvény? Hol van inflexiós pontja?

$$f'(x) = \frac{6x}{2+3x^2} \quad (2) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \frac{6(2+3x^2) - 6x\cdot 6x}{(2+3x^2)} \ (2) = \frac{6(2-3x^2)}{\underbrace{(2+3x^2)^2}_{>0}} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

	$(-\infty, -\frac{3}{\sqrt{2}})$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$(\frac{3}{\sqrt{2}}, \infty)$	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	(2)
f	$\cap$	infl. p	$\cup$	infl. p	$\cap$	(3)

an1z2091117/5.