

**I. példa.** Az A és B közeg a koordináta-rendszer  $x - z$  síkja választja el egymástól. Az  $x - y$  síkban, az ábra szerinti elrendezésben két pontszerű töltés helyezkedik el. Adatok:  $Q_1 = 2 \mu\text{As}$ ,  $Q_2 = -3 \mu\text{As}$ ,  $d = 10 \text{ cm}$ . Az A közeg levegő.

a) Feltéve, hogy a B közeg is *levegő*, határozza meg a  $Q_2$  töltésre ható erő vektorát! (2 pont)

$$F_2 = \frac{|Q_1 Q_2|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2d^2} = 2,7 \text{ N} \quad (1 \text{ p})$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{F_2}{\sqrt{2}} \vec{e}_x - \frac{F_2}{\sqrt{2}} \vec{e}_y = (-1,91\vec{e}_x - 1,91\vec{e}_y) \text{ N} \quad (1 \text{ p})$$

b) Feltéve, hogy a B közeg *fém*, határozza meg a  $Q_2$  töltésre ható erő vektorát! (5 pont)

$$F_{21} = 2,7 \text{ N} \text{ (lásd a.)}$$

$$F_{22'} = \frac{Q_2^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{9d^2} = 0,9 \text{ N} \quad (1 \text{ p})$$

$$F_{21'} = \frac{|Q_1 Q_2|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{5d^2} = 1,1 \text{ N} \quad (1 \text{ p})$$

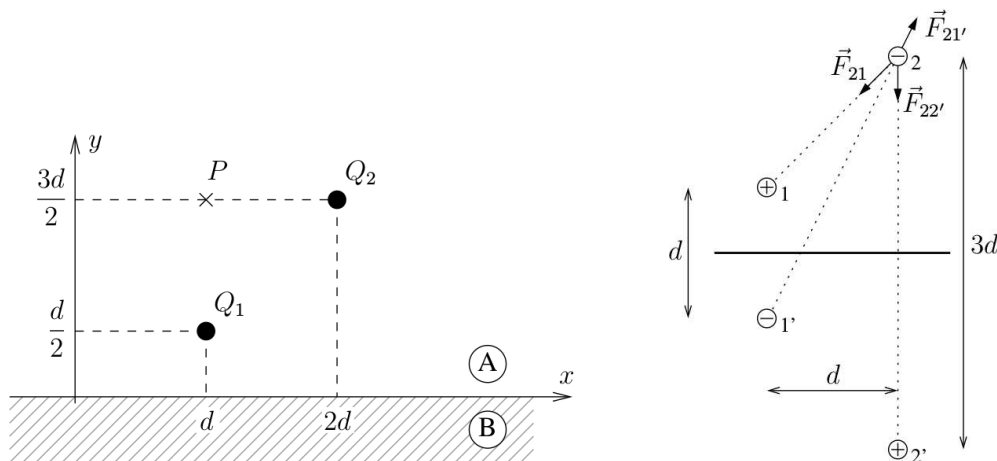
$$\vec{F}_2 = \left( \frac{F_{21'}}{\sqrt{5}} - \frac{F_{21}}{\sqrt{2}} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{2F_{21'}}{\sqrt{5}} - \frac{F_{21}}{\sqrt{2}} - F_{22'} \right) \vec{e}_y = (-1,42\vec{e}_x - 1,84\vec{e}_y) \text{ N} \quad (3 \text{ p})$$

c) Feltéve, hogy a B közeg *fém*, adja meg a  $P = (d, \frac{3}{2}d, 0)$  pont potenciálját, ha a fém potenciálja zérus! (3 pont)

$$\phi_P = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{2d} \right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{10}d} \right) = -94,53 \text{ kV} \quad (3 \text{ p})$$

d) (*nem kötelező IMSc feladat*) Feltéve, hogy a B közeg  $\epsilon_r = 3$  dielektromos állandójú szigetelőanyag, határozza meg a  $Q_2$  töltésre ható erő vektorát! (6 IMSc pont)

$$\text{A példatár 2.28 példája és a b) feladatrész alapján } \vec{F}_2 = (-1,67\vec{e}_x - 1,87\vec{e}_y) \text{ N}$$



**II. példa.** Síkelektrodák közé vezető anyagokat helyezünk el két rétegben, az ábra szerinti elrendezésben: a réteghatár párhuzamos az elektrodákkal. A  $d_1 = 3 \text{ mm}$  vastagságú réteg fajlagos vezetőképessége  $\sigma_1 = 0,2 \text{ S/m}$ , míg a  $d_2 = 5 \text{ mm}$  vastagságú rétege  $\sigma_2 = 0,1 \text{ S/m}$ . A kör alakú elektrodalemezek felszíne egyenként  $A = 4 \text{ cm}^2$ . Az elektrodákra  $U_0 = 20 \text{ V}$  egyenfeszültséget kapcsolunk.

a) Határozza meg az elektrodák közötti ellenállást! (2 pont)

$$R = \frac{d_1}{\sigma_1 A} + \frac{d_2}{\sigma_2 A} = 162 \Omega \quad (2 \text{ p})$$

b) Adja meg az áramsűrűség nagyságát az egyes közegekben! (2 pont)

$$I = \frac{U_0}{R} = 123 \text{ mA}, \quad J_1 = J_2 = J = \frac{I}{A} = 308 \text{ A/m}^2 \quad (2 \text{ p})$$

c) Adja meg az elektromos térerősség nagyságát az egyes közegekben! (2 pont)

$$E_1 = \frac{J}{\sigma_1} = 1538 \text{ V/m}, \quad E_2 = \frac{J}{\sigma_2} = 3077 \text{ V/m} \quad (2 \text{ p})$$

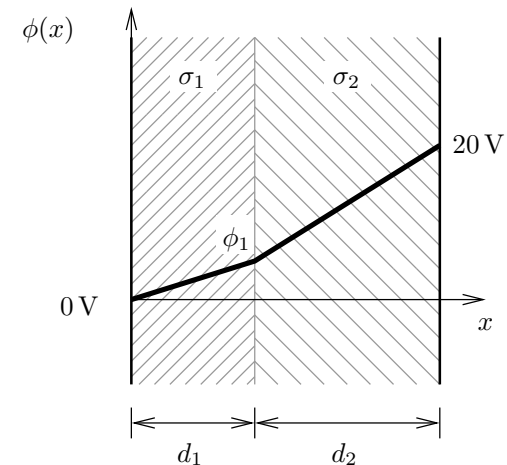
d) Mekkora a potenciál a rétegeket elválasztó határfelületen, ha a bal oldali lemez potenciálja  $0 \text{ V}$ , míg a jobb oldalié  $U_0$ ? Ábrázolja a potenciál változását a két lemez között, a lemezekre merőleges irány mentén! (4 pont)

$$\phi_1 = 0 \text{ V} + E_1 d_1 = U_0 - E_2 d_2 = 4,62 \text{ V} \quad (2 \text{ p})$$

A potenciál függvénye az egyes közegekben lineáris, ábrája alább látható. (2 p)

e) (*nem kötelező IMSc feladat*) Mekkora a felületi töltéssűrűség a közegeket elválasztó határfelületen, ha azok permittivitása rendre  $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$  és  $\epsilon_2 = 3\epsilon_0$ ? (4 IMSc pont)

$$\rho_s = D_1 - D_2 = \epsilon_1 E_1 - \epsilon_2 E_2 = -54,5 \text{ nAs/m}^2$$



## Kis példák

1. A  $V$  térfogatot az  $A$  zárt felület határolja;  $A$  irányítása kifelé mutató. Írja fel az energiamérleg integrális alakját és nevezze meg a benne szereplő mennyiségeket, ha tudjuk, hogy  $V$ -ben a vezetőképesség zérus és idegen (beiktatott) térerősség nincs jelen! (2 pont)

$$-\frac{d}{dt} \int_V w \, dV = \oint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}, \quad w: \text{energiasűrűség, } \vec{S}: \text{Poynting-vektor} \quad (2 \text{ p})$$

2. Hengerkondenzátor elektródáinak sugara  $r_1$  és  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ), potenciáljuk  $\phi_1$ , illetve  $\phi_2 = 0$ . Fejezze ki ezekkel a potenciált a kondenzátor tengelyétől tetszőleges  $r$  távolságban ( $r_1 < r < r_2$ )! (2 pont)

$$\phi(r) = \frac{\phi_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2}{r} \quad (2 \text{ p})$$

3. Egy  $C$  kapacitású, kezdetben töltetlen kondenzátor egyik fegyverzetéről  $Q$  töltést juttatunk a másikra. Mekkora munkát végzünk ennek során? (1 pont)

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (1 \text{ p})$$

4. Két elektródából és a földből álló elrendezés részkapacitásai  $C_{10}$ ,  $C_{20}$  és  $C_{12}$ . Az elektródák és a föld között  $U_1$  ill.  $U_2$  feszültséget létesítünk, majd a források leválasztását követően a 2. elektródát leföldeljük. Mekkora lesz így az 1. elektróda feszültsége a földhöz képest? (3 pont)

$$Q_1 = C_{10}U_1 + C_{12}(U_1 - U_2) \quad (1 \text{ p})$$

a földelést követően  $C_e = C_{10} + C_{12} \quad (1 \text{ p})$  és  $U_1 = \frac{Q_1}{C_e} = \frac{C_{10}U_1 + C_{12}(U_1 - U_2)}{C_{10} + C_{12}} \quad (1 \text{ p})$

5. A  $\Gamma$  felület vezető és szigetelő közeget választ el egymástól, az  $\vec{n}$  felületi normális a szigetelő felé mutat. A vezető közegben stacionárius áramlási tér alakult ki. Mit állíthat a  $\phi$  skalárpotenciál normális irányú deriváltjáról, azaz  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ -ről a vezető közegben, a  $\Gamma$  felület mentén? (2 pont)

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2 \text{ p})$$