1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal 2007/08 tél A3

1. Oldja meg a $2xy\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ differenciálegyenletet!
MO. $g(x,y) = 2xy$, $h(x,y) = 1+x^2$, $g_y = 2x = h_x$, továbbá g és h az egész síkon, azaz egy egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett, tehát a diff. egyenlet egzakt.
$F_x = g(x,y) = 2xy$, $F_y = h(x,y) = 1+x^2 \rightsquigarrow F = x^2y + c(y) \rightsquigarrow x^2 + c'(y) = F_y = 1 + x^2 \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow c'(y) = 1 \rightsquigarrow c(y) = y \rightsquigarrow F = x^2y + y = (1+x^2)y \rightsquigarrow (1+x^2)y = c$. Ennek $y = y(x)$ megoldásai az általános megoldás, tehát az általános megoldás: $y = \dfrac{c}{1+x^2}$

---

2. Oldja meg az $y'' - 4y' + 4y = x^2$ differenciálegyenletet !
MO. 1) A karakterisztikus polinomnak egyetlen kettős gyöke a $\lambda = 2$, így a homogén egyenlet általános megoldása: $y_{há} = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$. 2) Az inhomogén egy partikuláris megoldását $y = Ax^2 + Bx + C$ alakban keressük (az általános $e^{ax}(p(x)\sin bx + q(x)\cos bx)$ alakban $a = b = 0$, $p(x) = x^2$, $q(x) = 0$, így, mivel az $a+bj=0$ nem gyöke a karakterisztikus polinomnak, $m = 0$, azaz $x^m e^{ax}(P(x)\sin bx + Q(x)\cos bx) = = Ax^2 + Bx + C$. Ezzel tehát $y = Ax^2 + Bx + C$, $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$, amit az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $(2A - 4B + 4C) + x(-8A + 4B) + (4A-1)x^2 = 0$. Ebből $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{8}$, tehát az inhomogén egy partikuláris megoldása $y_{ip} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$, amivel az inhomogén általános megoldása:
$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}$.

---

3. Legyen L az $[xy]$ síkbeli $y = -x+1$, $z = 0$ egyenes $0 \le x \le 1$, $z = 0$ szakasza és $v(x,y,z) = (2xy^3, 3x^2y^2, z^2)$, $x,y,z \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki v vonalmenti integrálját L-en!

MO. (1) Mivel $\operatorname{rot} v = 0$, így lezárva a L-et az x ill. az y tengely $I = [0,1]$ és $I' = [0,1]$ szakaszaival és az így kapott háromszöglapra alkalmazva a Stokes tételt, azt kapjuk, hogy a keresett integrál v-nek $I + I'$-re vett vonalintegrálja, mely nulla, mert v itt nulla, hisz $v(x,y,z) = 0$, ha $z = 0$ és $x = 0$ vagy $y = 0$.
(2) Potenciálkeresés. $u_x = 2xy^3 \rightsquigarrow u = x^2y^3 + c(y,z) \rightsquigarrow u_y = 3x^2y^2 + c_y = 3x^2y^2 \rightsquigarrow c_y = 0$
$\rightsquigarrow c = d(z) \rightsquigarrow u = x^2y^3 + d(z) \rightsquigarrow u_z = d' = z^2 \rightsquigarrow d(z) = z^3/3 \rightsquigarrow u = x^2y^3 + z^3/3$. Legyen P és Q az L két végpontja $P = (0,1,0), Q = (1,0,0)$. $\int_L v\,dr = u(P) - u(Q) = 0 - 0 = 0$
(3) Vonalintegrál. L egy explicit egyenlete: $r(t) = (t, -t+1, 0), 0 \le t \le 1$. $\int_L v\,dr = \int_0^1 v(r(t)) \cdot \dot r(t)\,dt =$
$= \int_0^1 (2t(1-t)^3, 3t^2(1-t)^2, 0) \cdot (1,-1,0)\,dt = \int_0^1 2t(1-t)^3 - 3t^2(1-t)^2\,dt = \int_0^1 (2t - 6t^2 + 6t^3 - 2t^4) - (3t^2 - 6t^3 + 3t^4)\,dt =$
$= \int_0^1 (2t - 9t^2 + 12t^3 - 5t^4)\,dt = t^2 - 3t^3 + 3t^4 - t^5\big|_0^1 = 0$

---

4. Oldjuk meg a komplex számok körében az $e^{iz} + ie^{-4iz} = 0$ egyenletet!
MO. $e^{iz} + ie^{-4iz} = 0 \rightsquigarrow e^{iz} = -ie^{-4iz} \rightsquigarrow e^{iz} = e^{i3\pi/2}e^{-4iz} \rightsquigarrow e^{iz} = e^{i3\pi/2 - 4iz} \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow iz = i3\pi/2 - 4iz \ (2\pi i) \rightsquigarrow 5iz = i3\pi/2 \ (2\pi i) \rightsquigarrow z = 3\pi/10 \ (2\pi/5)$.

---

5. Legyen K az origóközéppontú $R = 2$ sugarú kör a komplex síkon. Mennyi az $\displaystyle\int_K \frac{1}{z(z^2-4z+3)}\,dz$ integrál értéke?
MO. Cauchy integrálformulával (K_1 és K_2 olyan origó ill. $z = 1$ középpontú körök, melyeken belül a középpont az integrandus egyetlen irreguláris helye):

$$\int_K \frac{1}{z(z^2-4z+3)}\,dz = \int_K \frac{1}{z(z-1)(z-3)}\,dz = \int_{K_1} \frac{\frac{1}{(z-3)(z-1)}}{z}\,dz + \int_{K_2} \frac{\frac{1}{z(z-3)}}{z-1}\,dz =$$
$$= 2\pi j\, \frac{1}{(z-1)(z-3)}\bigg|_{z=0} + 2\pi j\, \frac{1}{z(z-3)}\bigg|_{z=1} = \frac{2\pi j}{3} - \frac{2\pi j}{2} = -\frac{\pi j}{6}.$$

6.
(a) Melyik igaz, melyik nem? A lineáris differenciálegyenlet megoldása
(1) a homogén egyenlet egy partikuláris megoldásának és az inhomogén egyenlet általános megoldásának összege
(2) a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege
(3) az inhomogén egyenlet két megoldásának lineáris kombinációja
(4) a homogén és az inhomogén egyenlet egy-egy megoldásának lineáris kombinációja.

(b) Legyen v tetszőleges mindenütt deriválható vektor-vektor függvény. Melyik igaz, melyik nem?
(1) v divergenciája a deriváltoperátor vektorinvariánsának kétszerese
(2) v divergenciája a deriváltoperátor skalárinvariánsának kétszerese
(3) v rotációja a deriváltoperátor skalárinvariánsának kétszerese
(4) v divergenciája a deriváltoperátor bármely bázisbeli mátrixában a főátlóbeli elemek összege

MO. (a) A (2) igaz, a többi nem **(b)** A (4) igaz, a többi nem