Chernoff-korlát.

(spec. eset).

Van egy véletlen algoritmus, ami két válasz közül kiválasztja a valószínűbbet.

Ha futtatjuk n-szer, akkor többségi döntést hozunk.

pl: Ha adott a tévedés max. nagysága, akkor ki lehet számolni n-et, hogy min. 95% valószínűséggel a többségi döntéssel jó döntést hozunk.

Egy algoritmus két lehetséges válasz közül kiválasztja a helyeset, ezt p valószínűséggel teszi. Tfh. $p > \frac{1}{2}$.

A két lehetséges válasz: A és B.

n-szer lefuttatva az algoritmust a hibázás valószínűsége (azt a választ fogadjuk el, amelyikből több van)

pl: ha $n = 100$ és 55 A és 45 B jött ki, akkor a helyes az A.

A feladat, hogy becsüljük felül a hibázás valószínűségét

↓

P(n futtatás esetén a többségi döntés hibázik) ≤ ?

A Hoeffdingot alkalmazzuk.

Legyen $X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-ediket rosszul számolta} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$

így $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ = {a hibás ~~döntések~~ eredmények száma az első n-ből}

A többségi döntés ~ $\frac{1}{2}n$-től nagyobb legyen.

Így $P(\text{hibás a többségi döntés}) \equiv P\left(S_n > \frac{1}{2}n\right)$

A Hoeffding-egyenlőtlenség segítségével ezt felülbecsülhetjük:

$$P(S_n \geq ES_n + c) \underset{\text{Hoeffding}}{\leq} \exp\left(-\frac{2c^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right)$$

Az X-ekre a felső ill. alsó korlát:

$\sum X_i$-re: $a_i = 0 \leq X_i \leq 1 = b_i$

$$ES_n = n \cdot EX_1 = n(0 \cdot p + 1(1-p)) = n(1-p)$$

Vagyis

$\frac{1}{2}n = ES_n + c$ -ből kijön a c, amit keresünk.

$$\frac{1}{2}n = n(1-p) + c$$

$$c = n\left[p - \frac{1}{2}\right]$$

ez egy pozitív szám, mert az algoritmus miatt $p > \frac{1}{2}$, ie pénzfeldobásnál jobb.

Ezekből

$$P\left(S_n \geq \frac{1}{2}n\right) \underset{\text{Hoeffding}}{\leq} \exp\left(-\frac{2 \cdot n\left(p-\frac{1}{2}\right)}{\sum_{i=1}^{n}(1-0)^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{2n^2\left(p-\frac{1}{2}\right)^2}{n}\right) = \exp\left(-2\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 n\right)$$

Adott p esetén mennyi legyen az n, ha a hibázásra adott korlátot nem akarjuk túllépni

↓

adott egy $\varepsilon > 0$: a hibás döntés valószínűségének felső korlátja. A kérdés: mennyi legyen n, hogy a hibás ~~[illegible]~~ többségi döntés valószínűsége ne haladja meg ε-t?

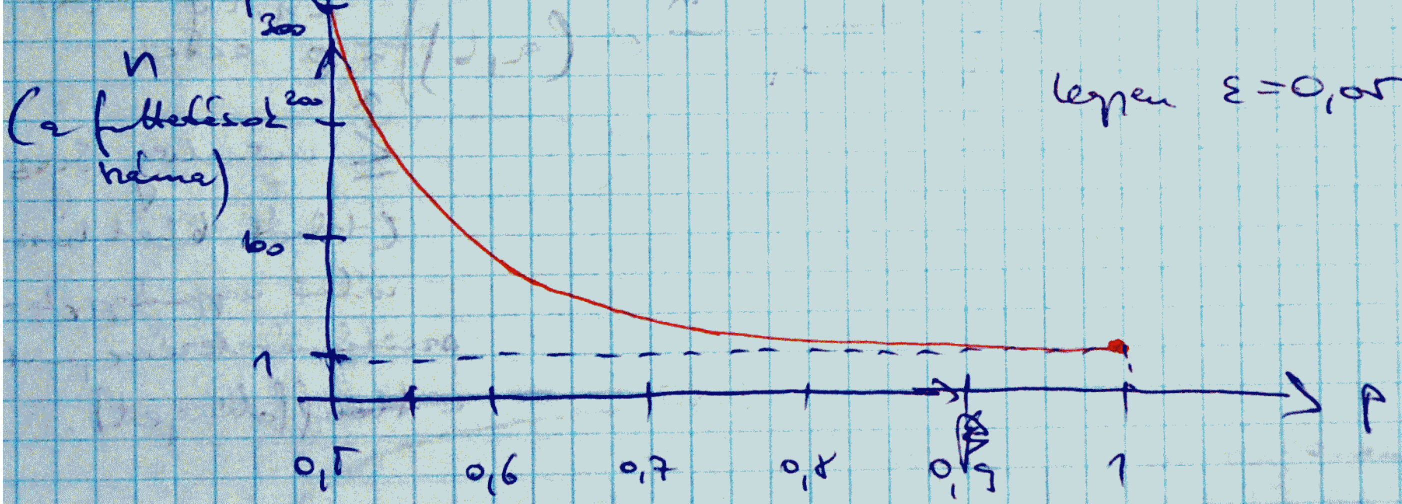
Vegyük:

$$\exp\left(-2\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 n\right) = \varepsilon$$

↓ n meghatározható

$$n \geq \ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Grafikusan ez:



Ha $\varepsilon = 0{,}5$ és $p = 0{,}9$, ~~[illegible]~~ akkor $n = 10$

Ha ~~$p = 0{,}6$~~ ~~akkor~~
$\varepsilon = 0{,}5$ $p = 0{,}6$ akkor $n = 150$

Ha $p = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^m$, akkor $n = 2^{2m} \cdot \ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

Cramér-tétel (folytatás)

(Ez már nagy eltérés tétel)
ez adja a legjobb eredményt a kapacitásbecslésre.

Ha $X_1, X_2, \ldots$ fgtlen. azonos eloszlású valamilyen $F(x)$ eloszlásfgv-nyel, (+ valami feltétel később!)

akkor $-\frac{1}{n} \ln P\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \in [a,b]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_{a<x<b} I(x)$

rátafgv. infimuma

Ez azt jelenti kb., hogy ha n nagy, akkor az, hogy az átlag beleesik egy $[a,b]$ intervallumba:

$$P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \in [a,b]\right) \approx e^{-n \cdot \inf_{a<x<b} I(x)}$$

$\leq$ mindig igaz.
(Tehát ezt lehet használni ugyanígy a kapacitásméretezésre, mint a Hoeffdinget).

momentum generáló függvény

Def: Adott egy X valószínűségi változó
$M(\lambda)$ legyen az $E(e^{\lambda X})$: $M_X(\lambda) = E(e^{\lambda X})$

Ez majdnem olyan, mint a Laplace-transzformált */

A momentumgenerátor fgv ugyanúgy viselkedik, mint a generátorfgv: $M_{X+Y} = M_X \cdot M_Y$

Tfh. $\exists \lambda_0 > 0$ úgy, hogy $M(\lambda_0) < \infty$.

Ezzel $\Lambda(\lambda) := \ln\left(M(\lambda)\right)$

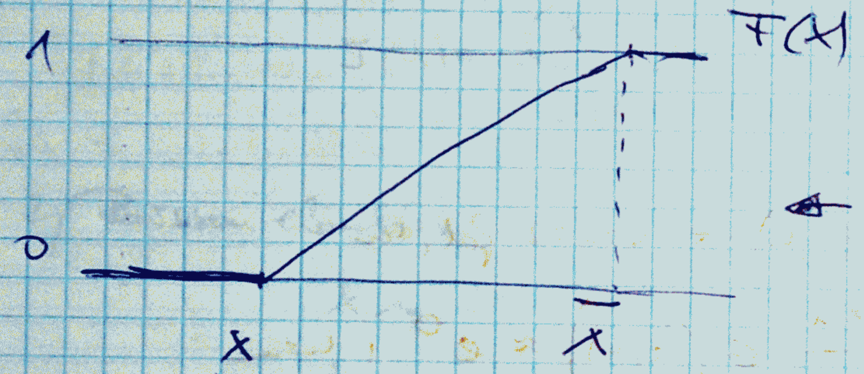
logaritmikus momentumgeneráló fv.

A múlt órán néztük, hogy

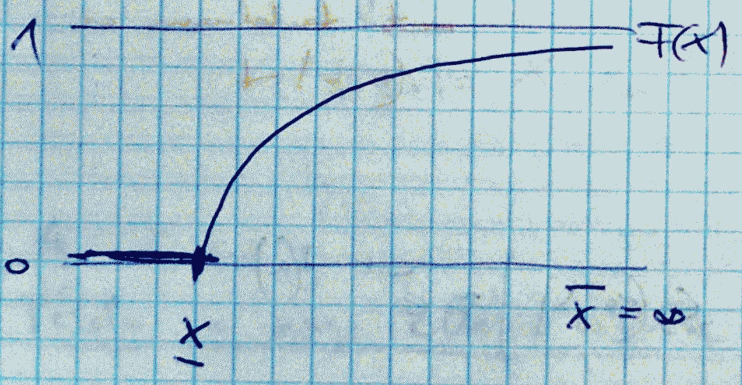
$$I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(\lambda x - \Lambda(\lambda)\right)$$ a rátafgv.

~~Az I(x) rátafüggvény tulajdonságai:~~

Az $F(x)$ és az $I(x)$ eloszlásfgv ill. rátafgv kapcsolata:

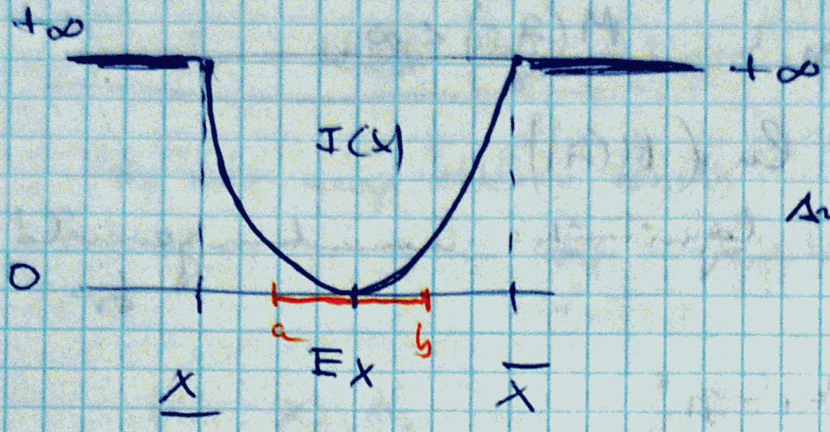


ez pl. az egyenletes eloszlás

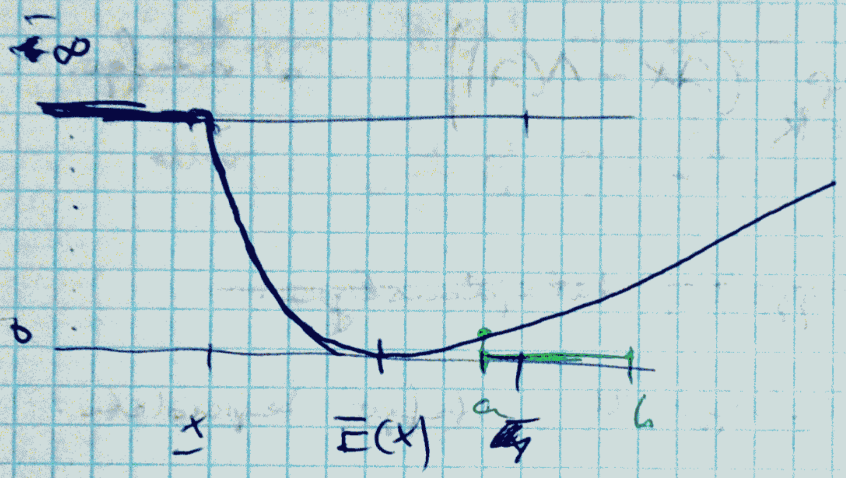


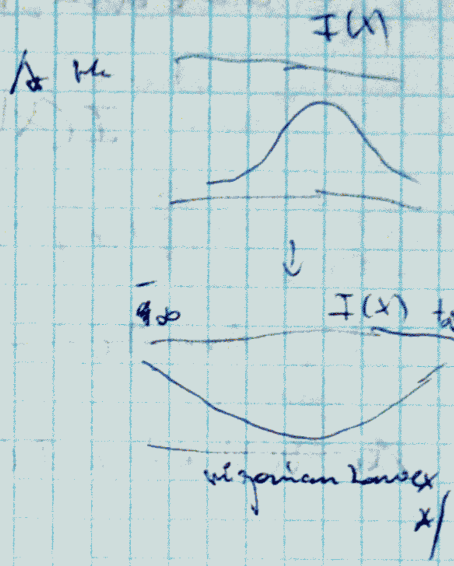
Ilyen pl. az exponenciális vagy a Poisson-eloszlás.

Ezekre a rátafgv-ek:



Az egyszerűbb alakban





$I(Ex) = 0$

Ha az Ex-et tartalmazó (a,b)-t vesszük fel, akkor

$$P\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \in (a,b)\right) \approx e^0 \text{, hiszen}$$

$$\inf_{a<x<b} I(x) = 0,$$

mert tartalmazza az (a,b)-t

Ha ez az (a,b) van, akkor

$$P\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} \in (a,b)\right) \approx e^{-n\cdot I(a)}$$

<u>Az $I(x)$ rátafüggvény kiszámolása:</u>

<u>Tétel</u>: $I(x) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left(\lambda x - \Lambda(\lambda)\right)$

Ha $x \in (\underline{x}, \overline{x})$, akkor $\exists!\ \lambda$, amire

$$\Lambda'(\lambda) = x$$

Jelöljük ezt a λ-t $\lambda^*(x)$-szel.

Ekkor $$I(x) = \lambda^*(x)\cdot x - \Lambda(\lambda^*(x))$$

Példák:

1) Normális eloszlásnál $X \sim N(m, \sigma)$

$$M(\lambda) = e^{m\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}$$

elvégezve a műveleteket:

$$I(x) = \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \qquad (\underline{x}, \overline{x}) = (-\infty, \infty)$$

2) Poisson eloszlásra:

$$X \sim Poi(\lambda)$$
$$\downarrow$$
$$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$
$$\downarrow$$
$$I(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x}{\lambda}\right) - x + \lambda \quad \text{ha} \quad x > 0$$

Példa a nagy eltérés tételre

1000 videó elérhető a műsoridőben.

X_i = az i. videó aktuális bitrátája.

Feltehetjük, hogy $X_i \sim N(2{,}8\,;\ 0{,}06)$

Ez 99,998 % valószínűséggel a $[2,6 \,;\, 3]$ intervallumba esik.

$C = ?$ úgy, hogy C-t 10^{-6} valószínűséggel lépi túl.

CHT-vel:

$$C = 2800 + 8,92$$

A CHT itt ~~elég~~ pontos, mert normális eloszlású valószínűségi változók vannak.

Hoeffding-gel:

$$C = 2800 + 33,25$$

Cramér:

$$P\left(\frac{X_1+\dots+X_{1000}}{1000} > \delta\right) \le e^{-1000\, I(\delta)} = 10^{-6}$$

$$\delta > EX$$

Most $I(x) = \dfrac{(x-2,800)^2}{2\cdot 0,0036}$

$e^{-1000\cdot I(\delta)} = 10^{-6}$-ot megoldva így

$$\delta = 2,8 + \sqrt{\frac{12\cdot \ln(10)\cdot 0,0036}{1000}} = 2,80997$$

Így $P(X_1+\dots+X_{1000} > \underbrace{\delta\cdot 1000}_{})$

C: ez a kapacitás, amit keresünk.

Vagyis $C = 1000\cdot 2,80997 \approx 2800+10$

A CHT ilyenkor teljesen pontos. A Cramér is elég jó pontos.

A Hoeffdingben csak a korlátokkal dolgozunk és az átlag várható értékével. A valószínűségi változó viszont köztben ~~sokféle~~ lehet → elveszünk dolgokat.

Sztochasztikus folyamatok

Adott egy T indexhalmaz (idő) és egy S állapottér

Ekkor $X = (X_t, t \in T)$ sztochasztikus folyamat, ha minden t-re X_t egy S értékű valószínűségi változó.
+ feltétel
(ez mértékelméleti)

A sztochasztikus folyamat egy véletlen valószínűségi változó: X

Egy konkrét t-re X_t az X egy marginális ~~eloszlása~~. eloszlása.

X valószínűségi változó, tehát $X: \Omega \to S^T$
(eredmények)
összes olyan fgv, ami a T-ből az S-be megy.

X egy trajektóriája (realizációja, megvalósulása).

$$X(\omega) = (X_t(\omega), t \in T)$$
egy konkrét t-es.

Ha T diszkrét (pl. $T = 0, 1, \dots$), akkor a sztochasztikus folyamat diszkrét idejű.

Ha $T = [a,b]$ vagy $\mathbb{R}$ (teljes intervallum), úgy a X folytonos idejű.

Ugyanígy lehet diszkrét ill. folytonos értékűt mondani:
Ha S diszkrét (pl. $S = \{0, 1, \dots\}$), akkor X diszkrét értékű)
Ha S folytonos (pl: $S = [a,b]$ vagy $\mathbb{R}$, akkor X folytonos értékű).

<u>Példák:</u>

1) Egymás után kockákat dobunk fel.

X_i = az i-edik kockadobás eredménye.

$$X = (X_i,\ i \in \underbrace{\{1, 2, \dots\}}_{T})$$

diszkrét idejű, diszkrét értékű

Egy trajektória eleje (X egy trajektóriája):

pl: $X(\omega) = (X_i(\omega),\ i \in \mathbb{N}) = (2, 3, 6, 6, 2, 3, 5)$

egy másik trajektória pl:

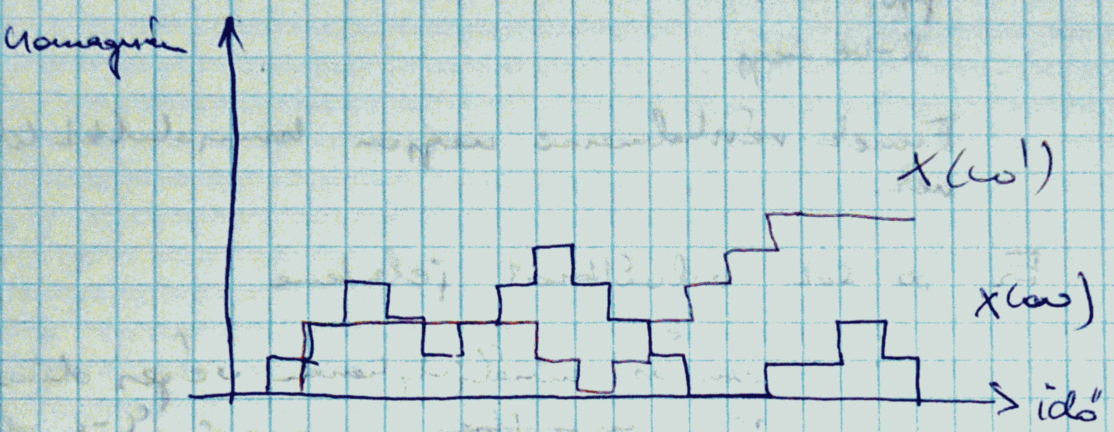
$X(\omega') = (6, 1, 1, 6, 1, 6, 2)$

2, Router
X_t = egy routerben a sorbanálló igények száma t időben.

~~X_t~~ $X = (X_t,\ t \in [0, \infty))$ folytonos ~~ért.~~ idejű, diszkrét értékű.

$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

Egy trajektória:

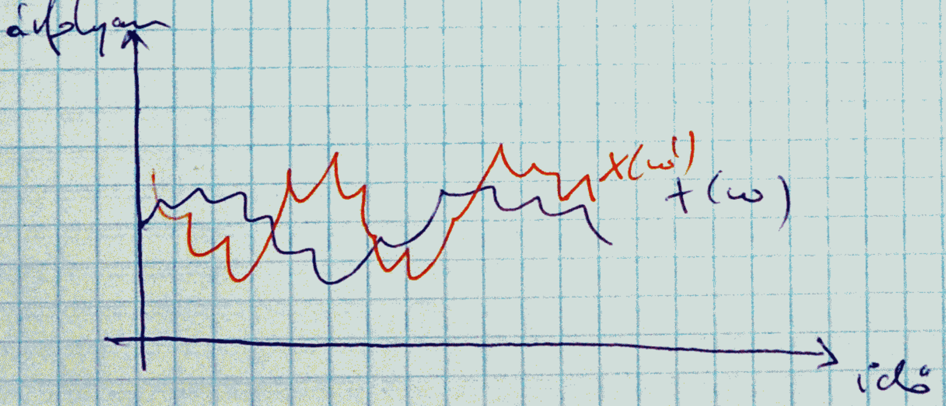


3.)

X_t = egy részvény árfolyama a t időben.

$X = (X_t, t \in [0, \infty))$ — folytonos idejű,

$S = (0, \infty)$ — folytonos értékű



Értékük egy függvény:

X egy olyan változó, hogy értéke egy függvény.

Egy valószínűségi változó legfontosabb jellemzője az eloszlása.

Vált egy $A \subset S^T \to P(x \in A) = ?$

$\forall A$-ra

összes olyan
fgv, ami T-ből
S-be megy.

Ennek részhalmazai nagyon bonyolultak lehetnek.

Ez ∞ sok valváltozót jelentene

nem ezt nézzük, hanem véges dimenziós ~~valváltozó~~ marginális eloszlásokat nézzük. Ezeket tudjuk kezelni. Ennyit elég is tudni az eloszlás meghatározásához.

Kolmogorov