ANALÍZIS(2) **II. ZÁRTHELYI pótlása, javítása** **2011. május 5.**
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

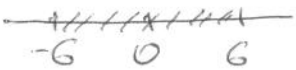
1. feladat (15 pont)

Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergencia tartományát:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-6)^n\ (n+1)}\ x^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-6)^n\ (n+1)}\ (x+1)^n$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-6)^n\ (n+1)}\ x^{2n}$$

a.) $\boxed{7}$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\ 6^n}{(n+2)\ 6^{n+1}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{(1+\frac{2}{n})\cdot 6} \longrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 6$ (4)



Végpontok:

$x = -6: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ div. (1)
$(\alpha = 1)$

$x = 6: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konv. (Leibniz sor) (1)

K.T.: $(-6, 6]$ (1)

b.) $\boxed{4}$ $u := x+1$ helyettesítéssel az a.)-beli feladatot kapjuk, ezért

$-6 < x+1 \le 6$
$-7 < x \le 5$ K.T.: $(-7, 5]$

c.) $\boxed{4}$ $u := x^2$ helyettesítéssel szintén a.)-hoz jutunk:

$\underbrace{-6 < x^2}_{\forall x\text{-re igaz}} \le 6 \Longrightarrow |x| \le \sqrt{6}$

K.T.: $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

(M) a.)-ban $\sqrt[n]{|a_n|}$-kel dolgozva $\sqrt[n]{n+1} \longrightarrow 1$-et rendőrelvvel meg kell mutatni.

2. feladat (13 pont)

a) A Taylor polinom definíciójával írja fel az

$$f(x) = \cos 2x\ -\ x^2\ +\ 3x$$

függvény $x_0 = 0$ pontbeli negyedrendű Taylor polinomját és a Lagrange-féle hibatagot!

b) A $(0, 1/2]$ intervallumon az f függvényt a fenti negyedrendű Taylor polinomjával közelítjük. Adjon becslést az elkövetett hibára!

an2z2p110505/1.

a.)

$\boxed{10}$ $f(x) = \cos 2x - x^2 + 3x$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -2\sin 2x - 2x + 3$ $\qquad f'(0) = 3$

$f''(x) = -4\cos 2x - 2$ $\qquad f''(0) = -6$

$f'''(x) = 8\sin 2x$ $\qquad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = 2^4 \cos 2x$ $\qquad f^{IV}(0) = 16$

$f^{V}(x) = -2^5 \sin 2x$

$$T_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4 = 1 + 3x - \frac{6}{2!}x^2 + \frac{16}{4!}x^4 \quad 7$$

$$R_4(x) = \frac{f^{V}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{-2^5 \sin 2\xi}{5!}x^5 \quad 3$$

$$\xi \in (0, x) \subset (0, \tfrac{1}{2}]$$

b.) $\boxed{3}$

$$|H| = |R_4(x)| = \frac{2^5 |\sin 2\xi|}{5!}|x|^5 \underset{x \in (0, \frac{1}{2}]}{\leq} \frac{2^5 \cdot 1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{5!}$$

3. feladat (14 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott x_0 pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg a sor konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{x}{2 + 6x^2}$, $\quad x_0 = 0$ $\qquad$ b) $g(x) = \dfrac{1}{3 + x}$, $\quad x_0 = -1$

a.) $\boxed{7}$

$$f(x) = \frac{x}{2}\,\frac{1}{1-(-3x^2)} = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-3x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(-3)^n x^{2n+1} \quad 5$$

$$|q| = |-3x^2| = 3|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$K.T.: \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad 2$$

b.) $\boxed{7}$

$$g(x) = \frac{1}{2 + (x+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \frac{-(x+1)}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x+1}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x+1)^n \quad 5$$

$$|q| = \left|-\frac{x+1}{2}\right| = \frac{|x+1|}{2} < 1 \Rightarrow |x+1| < 2$$

$$K.T.: (-3, 1) \quad 2$$

4. feladat (11 pont)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+5x^4}}$$

a) Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergenciasugarát! Írja fel az első négy nem nulla tagot elemi műveletekkel!

b) $f^{(12)}(0) = ?$

a) $\boxed{9}$

$$f(x) = (1+5x^4)^{-1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/3}{n} (5x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/3}{n} 5^n x^{4n} =$$ 4

$$= 1 + \frac{-\frac{1}{3}}{1} \cdot 5 \cdot x^4 + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{1 \cdot 2} \cdot 5^2 x^8 + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5^3 x^{12} + \dots$$ 3

$$|5x^4| = 5|x|^4 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{5}} = R$$ 2

b.) $\boxed{2}$

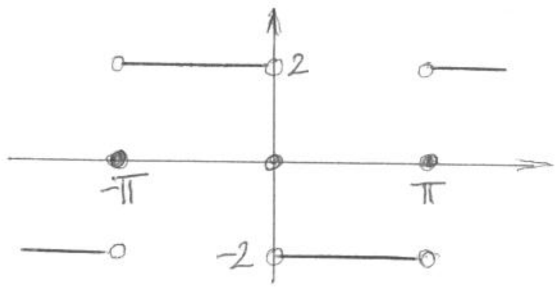
$$a_{12} = \frac{f^{(12)}(0)}{12!} \Rightarrow f^{(12)}(0) = 12!\, a_{12} = 12! \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{3!} 5^3$$

5. feladat (14 pont)

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha} \quad x \in (-\pi, 0) \\ -2, & \text{ha} \quad x \in (0, \pi) \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0\,, \text{ vagy } x = \pi \end{cases} \qquad , \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Írja fel a 2π szerint periodikus f függvény Fourier sorát!
(Elegendő az első négy nem nulla tagot kiírnia.)
Hol állítja elő a Fourier sor a függvényt?
Egyenletesen konvergens-e a Fourier sor?

f páratlan $\Rightarrow$ $a_k = 0$ $\quad k = 0, 1, 2, \dots$
2



$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \sin kx}_{ps} \, dx =$$

prtl prtl

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -2 \sin kx \, dx = -\frac{4}{\pi} \left. \frac{-\cos kx}{k} \right|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi k} (\cos k\pi - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ ps} \\ -\frac{8}{\pi k}, & \text{ha } k \text{ prtl} \end{cases}$$ 5

an2z2p110505/3.

$\phi(x) = -\frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \dots\right)$ (2)

$\phi(x) = f(x) \quad \forall\ x$-re (2) $\left(\phi(x) = \underbrace{\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = f(x)}_{\text{a szakadási pontokban is}} \right)$

A függvénysor elemei folytonosak, de a $\phi(x)$ összegfüggvény nem folytonos $\xRightarrow[\text{Weierstrass kr.}]{}$ a sor nem egyenletesen konvergens. (3)

6. feladat (20 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y+1)\,x^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e az f függvény az origóban?

b) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?)$
(Az origóban a definícióval dolgozzon!)

c) Totálisan differenciálható-e az f függvény a $(0,0)$ pontban?

a) Pl. $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq f(0,0) = 0$

$\boxed{5}$

$\Rightarrow f$ nem folytonos az origóban.

b.) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\frac{\frac{h^2}{h^2} - 0}{h}}_{=\frac{1}{h}} = \nexists$ (4)

$\boxed{13}$

Ha $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f'_x = \frac{(y+1)2x(x^2+y^2) - (y+1)x^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad (3)$$

$f'_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$ (3)

Ha $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f'_y = \frac{x^2(x^2+y^2) - (y+1)x^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \quad (3)$$

c.) Mivel $f'_x(0,0)\ \nexists \Rightarrow f$ nem deriválható a $(0,0)$-ban.
$\boxed{2}$ (Nem teljesül az egyik szükséges feltétel.)

an2z2p110505/4.

7. feladat (13 pont)

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y-1}\ (2y+1)^5 \qquad P_0 = (x_0, y_0) = (0, -1)$$

a) $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -3\,\underline{i} + 4\,\underline{j}$

b) $\min \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$

a.) $f'_x = 2x\, e^{x^2} e^{-y-1} (2y+1)^5$ (2)

$\boxed{11}$ $f'_y = e^{x^2}\left(e^{-y-1}(-1)(2y+1)^5 + e^{-y-1}\, 5\, (2y+1)^4 \cdot 2\right)$ (3)

f'_x, f'_y mindenütt $\exists$ és folytonos $\Rightarrow$ grad f mindenütt $\exists$, így számolhatunk az elégséges tétellel.

$\frac{df}{d\underline{e}} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \underline{e}$ (2)

$\underline{e} = -\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}$ (1)

$\operatorname{grad} f(P_0) = 0\,\underline{i} + 11\,\underline{j}$ (1)

$\frac{df}{d\underline{e}} = \frac{4}{5} \cdot 11$ (2)

b.) $\min \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = -|\operatorname{grad} f(P_0)| = -11$ (2)

$\boxed{2}$

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (12 pont)

Írja fel a következő függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

$$f(x) = e^x\,, \qquad g(x) = \sqrt{e^{x+4}}\,, \qquad h(x) = \operatorname{sh}(2x)$$

$f(x) = e^x = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)}_{\text{Elég az egyik alak}}$ KT: $(-\infty, \infty)$

an2z2p110505/5.

$$g(x) = e^{\frac{x}{2}+2} = e^2 e^{\frac{x}{2}} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\Big|_{u=\frac{x}{2}} =$$

$$= e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,2^n} x^n \qquad \text{K.T.} : (-\infty, \infty)$$

$$h(x) = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \dots \Big|_{u=2x} = 2x + \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^5 x^5}{5!} + \dots$$

$$\text{K.T.} : (-\infty, \infty)$$

9. feladat (8 pont)

$$f(x,y) = 3x^2y + 4xy^4 - 2y + 15, \qquad x_0 = 1, \quad y_0 = 0$$

Írja fel f grafikonjának az adott ponthoz tartozó érintősíkja egyenletét!

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 6xy + 4y^4 \\ f'_y &= 3x^2 + 16xy^3 - 2 \end{aligned}\right\} \ (4)$$

Az érintősík

$$f'_x(P_0)(x - x_0) + f'_y(P_0)(y - y_0) - (z - f(P_0)) = 0 \quad (2)$$

$$f'_x(P_0) = 0 \ ; \ f'_y(P_0) = 1 \ ; \ f(P_0) = 15$$

$$1(y - 0) - (z - 15) = 0 : \text{ érintősík} \quad (2)$$