ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak — I. ZÁRTHELYI — α változat — 2012. márc. 8.
Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (10 pont)
Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{x\ \mathrm{sh}(x)}{4y\ \mathrm{ch}(2y^2+1)}, \qquad y \neq 0$$

Elég a megoldást implicit alakban megadni.

$$\int 4y\ \mathrm{ch}(2y^2+1)\,dy = \int x\cdot \mathrm{sh}x\,dx \quad (3)$$

$f'\ \mathrm{ch} f$

$$\int x\cdot \mathrm{sh}x\,dx = x\,\mathrm{ch}x - \int \mathrm{ch}x\,dx = x\cdot\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x$$

$u = x \quad v' = \mathrm{sh}x$
$u' = 1 \quad v = \mathrm{ch}x$

A differenciálegyenlet megoldása:

$$\mathrm{sh}(2y^2+1) = x\,\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x + C$$
(2) (4) (1)

2. feladat (16 pont)
Oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$y' = x\cdot\left(x + \frac{2y}{x^2+1}\right), \qquad y(0) = 5$$

A megoldást explicit alakban (y-ra kifejezve) adja meg!

Átrendezve:

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = x^2 \quad : \text{ lineáris elsőrendű de.}$$

(H): $y' = \frac{2x}{1+x^2}y$: $y_H = C\cdot\varphi(x)$ alakú, ezért elegendő egy megoldást keresni.

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$\ln y = \ln(x^2+1) \Rightarrow y = x^2+1 = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow y_H = C(x^2+1), \quad C\in\mathbb{R} \quad (6)$$

$$y_{ip} = c(x)(x^2+1) \quad (1)$$

$$y_{ip}' = c'(x^2+1) + c\cdot 2x$$

Behelyettesítve:

$$c'(x^2+1) + \cancel{c\,2x} - \cancel{\frac{2x}{x^2+1}c\cdot(x^2+1)} = x^2$$

$$\Rightarrow c = \int\frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= x - \mathrm{arctg}\,x, \text{ tehát } y_{ip} = (x-\mathrm{arctg}\,x)(x^2+1) \quad (5)$$

$$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C(x^2+1) + (x-\mathrm{arctg}\,x)(x^2+1) \quad (2)$$

$y(0)=5$: $\quad 5 = C + 0 \Rightarrow C = 5$:

$$y = 5(x^2+1) + (x-\mathrm{arctg}\,x)(x^2+1) \quad (2)$$

3. feladat (14 pont)
Az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel oldja meg a következő differenciálegyenletet!

$$xy' = y + \sqrt{y^2+4x^2}, \qquad x > 0$$

A megoldást elég x és y közti implicit kapcsolat alakjában megadni.

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u\cdot 1 \quad (3)$$

A de-et átalakítva:

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+4}$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$u'\cdot x + u = u + \sqrt{u^2+4} \Rightarrow u' = \frac{1}{x}\sqrt{u^2+4} \quad (3)$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+4}} = \int\frac{1}{x}\,dx \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{u}{2}\right)^2}}\,du = \int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{arsh}\frac{u}{2}}{\frac{1}{2}} = \ln x + C \qquad C\in\mathbb{R}$$
(3) (1) (1)

Visszahelyettesítve:

$$\mathrm{arsh}\frac{y}{2x} = \ln x + C \quad (1)$$

4. feladat (17 pont)

$$y' = x^2 + 2x + y^2 - 24$$

a) Rajzolja fel a fenti defferenciálegyenlet $K = 0$, -9 és $+11$ meredekséghez tartozó izoklínáját, és ábrázoljon az izoklinákon néhány helyen egy-egy vonalelemet!

b) Van-e a fenti differenciálegyenlet $(x_0, y_0) = (2, 4)$ ponton átmenő megoldásának lokális szélsőértéke ebben a pontban? Ha igen, milyen jellegű?

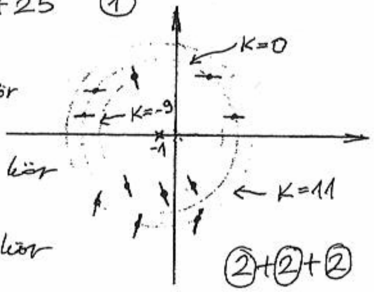
a) Izoklinák: $x^2 + 2x + y^2 - 24 = K$ (2)

$\boxed{9}$ $(x+1)^2 + y^2 = K + 25$ (1)

$K=0$: $(x+1)^2 + y^2 = 25$:
$(-1,0)$ középpontú 5 sugarú kör

$K=-9$: $(x+1)^2 + y^2 = 16$:
$(-1,0)$ középpontú 4 sugarú kör

$K=11$: $(x+1)^2 + y^2 = 36$
$(-1,0)$ középpontú 6 sugarú kör



(2)+(2)+(2)

b.) $y(2)=4$

$\boxed{8}$ $y'(2) = x^2+2x+y^2-24 \Big|_{\substack{x=2\\y=4}} = 4+4+16-24=0$ (2)
lehet lok. szé.

$y'' = 2x + 2 + 2yy'$ (3)

$y''(2) = 2x+2+2yy' \Big|_{\substack{x=2\\y=4\\y'=0}} = 6$ (1)

$y'(2)=0$ és $y''(2)>0$: lokális minimum van az adott pontban. (2)

5. feladat (17 pont)

$$y^{(4)} + 4y'' = f(x)$$

a) Határozza meg a fenti differenciálegyenlet általános megoldását, ha $f(x) = e^{2x}$!

b) Milyen alakban keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását, ha

$$f(x) = x - 3 + 5\,e^{-3x} \ ?$$

(A differenciálegyenletet most nem kell megoldani.)

a.) $y^{IV} + 4y'' = e^{2x}$

$\boxed{13}$ (H): $\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2+4) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=0,\ \lambda_{3,4} = \pm j2$

$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$ (6) $C_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,3,4$

(I):
$y_{ip} = Ae^{2x}$ (2)
$y'_{ip} = 2Ae^{2x}$
4. $y''_{ip} = 4Ae^{2x}$
$y'''_{ip} = 8Ae^{2x}$
1. $y^{IV}_{ip} = 16Ae^{2x}$

Behelyettesítve (I)-be:
$e^{2x}(16+16A) = e^{2x}$
$\Rightarrow 32A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{32}$

$y_{ip} = \frac{1}{32}e^{2x}$ (3)

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2x + C_3\cos 2x + C_4 \sin 2x + \frac{1}{32}e^{2x}$ (2)
$C_i \in \mathbb{R}$

b.) $y_{ip} = (Ax+B)x^2 + Ce^{-3x}$
$\boxed{4}$ külső rezonancia

6. feladat (10 pont)

Írjon fel egy olyan legalacsonyabb rendű lineáris, homogén, állandó együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldásai között szerepel az

$$x^2 \quad \text{és az} \quad x\,e^{-x}$$

függvény! Írja föl az egyenlet általános megoldását is!

x^2 megoldás $\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0$ (2)
xe^{-x} megoldás $\Rightarrow \lambda_{4,5} = -1$ (2)
A karakterisztikus egyenlet:
$\lambda^3(\lambda+1)^2 = 0$
$\lambda^3(\lambda^2+2\lambda+1) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 = 0$ (2)
A de.: $y^V + 2y^{IV} + y''' = 0$ (2)
Az általános megoldás:
$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x} + C_5xe^{-x}$; $C_i \in \mathbb{R}$
(2)

7. feladat (16 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányados kritérium limeszes alakját!

b) Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$b1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\,, \qquad b2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{2^{2n}\cdot n^5}\,.$$

a.) (T) $\boxed{3}$

1. $(a_n>0, \forall n) \wedge (\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

2. $(a_n>0, \forall n) \wedge (\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1$ vagy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

b.) $\boxed{13}$ b1)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2\,(2n)!}{(2n+2)!\,(n!)^2} \;(2)\; = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \;(2)\; =$$

$$= \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)} \to \frac{1}{4} < 1$$

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv. (3)

b2)

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{5\cdot 5^n}{4^n n^5}} \;(2)\; = \frac{\sqrt[n]{5}\cdot 5}{4\cdot(\sqrt[n]{n})^5} \to \frac{5}{4} > 1$$

($\sqrt[n]{5}\to 1$, $\sqrt[n]{n}\to 1$)

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ div. (4)

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez, 40%-ig javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

$$f(n+1) = 5f(n) - 6f(n-1)$$

a) Határozza meg a fenti rekurzió általános megoldását!

b) Határozza meg a rekurzió

$$f(0) = -2\,, \qquad f(1) = -9$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldását!

an221α120308/5.

a.) $f(n) = q^n$: $\boxed{7}$

$q^{n+1} = 5q^n - 6q^{n-1}$ (2) $\quad |: q^{n-1} \neq 0$

$q^2 = 5q - 6 \Rightarrow q^2 - 5q + 6 = 0 \Rightarrow q_1 = 3,\ q_2 = 2$ (3)

$f(n) = c_1\cdot 3^n + c_2\cdot 2^n$ (2) $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b.) $\boxed{3}$

$f(0) = -2$: $\quad c_1 + c_2 = -2$

$f(1) = -9$: $\quad 3c_1 + 2c_2 = -9$

$\Rightarrow c_1 = -5,\ c_2 = 3$

$f(n) = -5\cdot 3^n + 3\cdot 2^n$

9. feladat (10 pont)

Oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$y' = \left(\frac{1}{x^3} - x^3\right) e^y\,, \qquad y(1) = 0$$

A megoldást explicit alakban (y-ra kifejezve) adja meg!

Szeparálható de.: $\quad \int \underbrace{\frac{1}{e^y}}_{=e^{-y}} dy = \int \left(\frac{1}{x^3} - x^3\right) dx$ (2)

$-e^{-y} = \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^4}{4} + \tilde{c}$, $\quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$

(2) (2) (1).

$e^{-y} = \frac{1}{2x^2} + \frac{x^4}{4} + c$, $\quad c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = -\ln\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{x^4}{4} + c\right)$ (1) $\quad c \in \mathbb{R}$

$y(1) = 0$:

$0 = -\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + c\right) \Rightarrow c = \frac{1}{4}$

$y = -\ln\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4}\right)$ (2)

an221α120308/6.