1. feladat (10+10=20 pont)
a) Ismertesse, és igazolja a konvergens sorozatok szorzatának határértékének szóló tételt!
b) Határozza meg az $\sqrt[n]{n \cdot 2^n + 5^n}$ sorozat határértékét!

Mo. *a*) Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_b = AB$ **(2p)** , mert ha (a_n) konvergens, akkor korlátos, így létezik olyan $K > 0$, melyre $|a_n| < K$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén **(2p)** . Legyen $\varepsilon > 0$. Ha $B = 0$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $|a_n b_n| < K|b_n| < \varepsilon$, ha $|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{K}$. **(2p)** Ha $B \neq 0$, akkor

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \leq K|b_n - B| + |B||a_n - A|.$$

Létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N_1$ esetén $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2|B|}$, és létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N_2$ esetén $|b_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$, vagyis $n \geq N(\varepsilon) = \max(N_1, N_2)$ esetén $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$. **(4p)**
b) A rendőrelv miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot 2^n + 5^n} = 5$ **(2p)** , mert

$$5 \overset{\textbf{(2p)}}{\leftarrow} 5\sqrt[n]{n} \overset{\textbf{(2p)}}{\leq} \sqrt[n]{n \cdot 2^n + 5^n} \overset{\textbf{(2p)}}{\leq} \sqrt[n]{2n5^n} \overset{\textbf{(2p)}}{\to} 5$$

---

2. feladat (4+10=14 pont)
a) Definiálja egy sorozat torlódási pontjait!
b) Adja meg az $a_n = \left(\dfrac{n - (-1)^n}{n+2}\right)^{n-2}$ sorozat torlódásai pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját! Konvergens-e a sorozat?

Mo. *a*) Az $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ az (a_n) sorozat torldási pontja, ha létezik olyan (a_{n_k}) részsorozat, amelyre $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. **(4p)** (Vagy: ha A minden környezetébe végtelen sok sorozatelem esik.)
b) Páratlan n esetén

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n-2} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{-2} \to \frac{1}{e}, \qquad \textbf{(3p)}$$

páros n esetén

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-2} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{-2} \to \frac{1}{e^3}, \qquad \textbf{(3p)}$$

így a sorozat torlódási pontjainak halmaza $\left\{\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e^3}\right\}$ **(1p)** , $\limsup a_n = \dfrac{1}{e}$ **(1p)** , $\liminf a_n = \dfrac{1}{e^3}$ **(1p)** , és mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, így a sorozat divergens **(1p)** .

---

3. feladat (4+8=12 pont)
a) Ismertesse a L'Hospital-szabályt!
b) Számolja ki a $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x^2-4)-\operatorname{sh}(x^2-2x)}{\operatorname{arctg}(x-2)}$ határértéket!

Mo. *a*) Ha f és g differenciálható x_0 egy kipontozott környezetében, és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, vagy $\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right| = \infty$, akkor $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, amennyiben a jobb oldali határérték létezik. **(4p)**
b) A számláló és a nevező határértéke egyaránt 0, így alkalmazható a l'Hospital-szabály. **(2p)**

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)-\operatorname{sh}(x^2-2x)}{\operatorname{arctg}(x-2)} \overset{\textbf{(4p)}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x\cos(x^2-4)-(2x-2)\operatorname{ch}(x^2-2x)}{\dfrac{1}{1+(x-2)^2}} \overset{\textbf{(2p)}}{=} 2$$

---

4. feladat (4+14=18 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy egy (a,b) intervallumon differenciálható függvénynek az $x_0 \in (a,b)$ pontban lokális szélsőértékhelye van!
b) $f(x) = 2x + \arccos(x+1)$
Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az f függvény monoton! Hol és milyen típusú lokális szélsőértékhelyei vannak a függvénynek?

Mo. *a*) $f'(x_0) = 0$, és f' az x_0 pontban előjelet vált, vagy $f''(x_0) \neq 0$ **(4p)** .
b) $D_f = [-2, 0]$ **(2p)** , és $f'(x) = 2 + \dfrac{-1}{\sqrt{1-(x+1)^2}} = 0$ **(2p)** ha $(x+1)^2 = \dfrac{3}{4}$ **(2p)** , vagyis ha $x = -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $x = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(2p)** , a f' pedig két érték között pozitív, az értelmezési tartomány többi pontjában pedig negatív **(2p)** , így a függvény a $\left(-2, -1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és a $\left(-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ intervallumon monoton fogy **(1p)** , a $\left(-1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ intervallumon monoton nő **(1p)** , az $x = -1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pontban lokális minimuma **(1p)** , az $x = -1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pontban pedig lokális maximuma **(1p)** van.

---

5. feladat (4+9=13 pont)*
a) Ismertesse a helyettesítéses integrálás módszerét határozatlan integrálra!
b) Határozza meg $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}+3}$ primitív függvényét a $t = \sqrt{x-1}$ helyettesítéssel!

Mo. *a*) $\displaystyle\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$ **(4p)** (φ egy intervallumon deriválható és invertálható függvény.)

b) Ha $t=\sqrt{x-1}$, akkor $x=t^2+1=\varphi(t)$, $\varphi'(t)=2t$ **(2p)** , így

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x-1}+3}dx \overset{(\mathbf{1p})}{=} \int \frac{t^2+3}{t+3}\cdot 2tdt \overset{(\mathbf{1p})}{=} 2\int \frac{t^3+3t}{t+3}dt \overset{(\mathbf{2p})}{=}$$
$$= 2\int t^2-3t+12-\frac{36}{t+3}dt \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2t^3}{3}-3t^2+24t-72\ln|t+3|+c \overset{(\mathbf{1p})}{=}$$
$$= \frac{2(\sqrt{x-1})^3}{3}-3(x-1)+24\sqrt{x-1}-72\ln(\sqrt{x-1}+3)+c$$

6. feladat (4+9=13 pont)*

a) Ismertesse a Newton–Leibniz-formulát!

b) Számolja ki az alábbi integrált

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{3\sin x+2\cos x}{\cos^3 x}dx.$$

Mo. *a*) Ha $f\in R[a,b]$, és $\exists F$, melyre $F'=f$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ **(4p)**

b) $\displaystyle\int \frac{3\sin x+2\cos x}{\cos^3 x}dx \overset{(\mathbf{3p})}{=} -3\int(\cos x)'(\cos x)^{-3}dx+2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{3}{2\cos^2 x}+2\operatorname{tg} x+c,$

vagyis

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{3\sin x+2\cos x}{\cos^3 x}dx \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{3}{2\cos^2\pi/3}+2\operatorname{tg}\pi/3-\frac{3}{2\cos^2(-\pi/4)}-2\operatorname{tg}(-\pi/4) \overset{(\mathbf{1p})}{=} 6+2\sqrt{3}-3+2.$$

7. feladat (10 pont)*

Konvergens-e az alábbi improprius integrál? Ha igen, adja meg az értékét!

$$\int_0^\infty (2x+1)e^{-4x+3}dx$$

Mo. Parciális integrálással

$$\int (2x+1)e^{-4x+3}dx = -\frac{(2x+1)e^{-4x+3}}{4}+\frac{1}{2}\int e^{-4x+3}dx = -\frac{(4x+3)e^{-4x+3}}{8}+c \qquad \textbf{(4p)},$$

$$\int_0^\infty (2x+1)e^{-4x+3}dx = -\left(\lim_{\omega\to\infty}\frac{(4\omega+3)e^{-4\omega+3}}{8}\right)+\frac{3e^3}{8} = \frac{3e^3}{8}, \qquad \textbf{(4p)},$$

mert

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{(4\omega+3)e^{-4\omega+3}}{8} = \lim_{\omega\to\infty}\frac{(4\omega+3)}{8e^{4\omega-3}} = 0, \qquad \textbf{(2p)}$$

IMSC feladat (14 IMSC pont)

5 liter olajat olyan flakonba csomagolnak, amelyik egy félgömbből és egy hengerből áll. A henger a félgömbhöz az alapkörlap mentén csatlakozik. Hogy kellene megadni a henger alapkörének (és egyben a félgömbnek) a sugarát, hogy a lehető legkevesebb műanyagot használjanak? (Igazolja azt is, hogy valóban minimumról van szó!)

Mo. A flakon felszínét kell minimalizálni, úgy, hogy a térfogata 5dm^3 legyen, vagyis r(dm) sugár, és a henger m(dm) magassága esetén: $5 = \frac{2}{3}\pi r^3 + mr^2\pi$ **(2p)** , amiből $m = \frac{5}{r^2\pi} - \frac{2r}{3}$ **(2p)** . A flakon felszíne:

$$A(r) = r^2\pi + 2r^2\pi + 2r\pi m = 3r^2\pi + \frac{10}{r} - \frac{4r^2\pi}{3} = 5\left(\frac{r^2\pi}{3}+\frac{2}{r}\right). \qquad \textbf{(3p)}$$

$A'(r) = 5\left(\frac{2r\pi}{3} - \frac{2}{r^2}\right) = 0$ **(2p)** ha $r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ **(2p)** , és $A''\left(\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\right) = 10\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{\frac{3}{\pi}}\right) > 0$ **(2p)** , vagyis itt az A függvénynek valóban minimima van **(1p)** .
