An(2) ZH(2) 06.04.20.

1)

1) Feladat (13 pont).

a) Írja le a Weierstrass kritériumot!

b)

$$\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k+x^2 2^k}\arctan\frac{kx+1}{x^2+1}\right)=?$$

$$|f_k(x)| = \frac{1}{3^k+x^2\cdot 2^k}\left|\operatorname{arctg}\frac{kx+1}{x^2+1}\right| \le \frac{1}{3^k+x^2\cdot 2^k}\cdot\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$\le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3^k} = b_k \quad (2)$$, ahol $\sum^{\infty} b_k$ konv. geom. sor (2) $\overset{W. krit.}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} f_k(x)$ egy. konv. $(-\infty,\infty)$-on (2)

Mivel $\sum^{\infty} f_k(x)$ egy. konv. $(-\infty,\infty)$-on és $f_k(x)$ folyt $x_0=0$-ban, akkor a $\sum^{\infty}$ és $\lim_{x\to 0}$ felcserélhető: (2)

$$\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to 0} f_k(x) \quad (1) =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{8} \quad (3)$$

An(2) ZH(2) 06.04.20.

2)

2) Feladat (10 pont).

a) Írja fel a $\cos x$ és a $\cosh x$ origó körüli Taylor sorait, azok konvergencia tartományait! (Nem kell indokolnia!)

b) $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16^k}{(4k)!}=?$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\mp\cdots \qquad R=\infty \quad (2)$$

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad R=\infty \quad (2)$$

$$\cos 2 = 1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}\mp\cdots \quad (3)$$

$$\cosh 2 = 1+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}+\cdots \quad (2)$$

$$\frac{\cos 2+\cosh 2}{2} = 1+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^8}{8!}+\frac{2^{12}}{12!}+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2^4)^k}{(4k)!} \quad (1)$$

An(2)ZH(2)06.04.20.

3) Feladat (16 pont).

a) Határozza meg az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+3x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergencia sugarát!

b) Becsülje meg az elkövetett hibát, ha az

$$\int_0^{10^{-1}} \frac{1}{(1+3x^2)^{1/4}}\,dx$$

közelítő értékét az integrandus $x_0 = 0$ körüli másodfokú Taylor polinomja felhasználásával számoljuk ki!

c) Határozza meg az A és az α értékét úgy, hogy

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+3\frac{1}{n^2}}} - 1$$

aszimptótikusan egyenlő legyen An^{α}-val!

a) $f(x) = (1+3x^2)^{-\frac14} = (1+u)^{-\frac14}\Big|_{u=3x^2} = \sum_0^\infty \binom{\alpha}{k} u^k \Big|_{u=3x^2}$ (2)

ha $|u|<1$ (1), $|3x^2|<1$ $|x|<\frac{1}{\sqrt3} = R$ (1)

$f(x) = \sum_0^\infty \binom{\alpha}{k} 3^k x^{2k}$ (1)

b) $\int_0^{1/10} 1 - \frac34 x^2 + \frac{5\cdot 9}{32}x^4 - \dots\, dx$ (2) $= \left[x - \frac34\frac{x^3}{3} + \frac{5\cdot9}{32}\frac{x^5}{5} - \dots\right]_0^{1/10}$ (2)

$= \frac{1}{10} - \frac{1}{10^3}\cdot\frac14 + \frac{5\cdot9}{32}\frac{1}{5\cdot 10^5} - \dots \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{10^3}\cdot\frac14$

$H \le \frac{9}{32}\cdot\frac{1}{10^5}$ (2), mert $\frac{1}{10} - \frac34\cdot\frac{1}{3\cdot10^3} + \frac{5\cdot9}{32}\cdot\frac15\frac{1}{10^5} + \dots$ Leibniz típusú (1)

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^2}}} - 1 = -\frac34\frac{1}{n^2} + \frac{\left(-\frac14\right)\left(-\frac54\right)}{2!}3^2\frac{1}{n^4} + \frac{\left(-\frac14\right)\left(-\frac54\right)\left(-\frac94\right)}{3!\,n^6}\dots$

$= \frac{1}{n^2}\left(-\frac34 + \frac{5\cdot9}{32}\cdot\frac{1}{n^2} \mp \dots\right)$ (2) $\Rightarrow \dots$

$\sim -\frac34 n^{-2}$, $A = -\frac34$ $\alpha = -2$ (2)

4)

An(2)ZH(2) 06.04.20.

4) Feladat (13 pont).

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 5, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Létezik-e a határértéke f-nek az origóban? Totálisan differenciálható-e az f függvény az origóban?

b) Írja le az iránymenti derivált definícióját!

c) A definíció alapján döntse el, hogy létezik-e az f függvénynek a $(0,0)$ pontbeli, $\underline{v} = (3,4)$ irányú iránymenti deriváltja!

a) (5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(x^2+y^2)}_{\downarrow\, 0}\,\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{korl.}} = 0 \neq f(0)$

f nem folyt. az origóban $\Rightarrow$ f nem tot. diffh. $\underline{0}$-ban

b) (2) $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}\Big|_{\underline{x}_0} = \lim_{t\to0^+}\frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{e}) - f(\underline{x}_0)}{t}$,

ha $|\underline{e}| = 1$

c) (6) $|\underline{v}| = 5$ $\underline{v} \parallel \underline{e} = \frac15(3,4)$, $|\underline{e}| = 1$ (2)

$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}\Big|_{\underline{0}} = \lim_{t\to0^+}\frac{f\left(\frac35 t, \frac45 t\right) - 5}{t}$ (1) $=$

$= \lim_{t\to0^+}\frac{\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)t^2\sin\frac{5}{3t} - 5}{t}$ (1) $=$

$= \lim_{t\to0^+} \underbrace{t\sin\frac{5}{3}t}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\frac{5}{t}}_{\nexists} = \nexists$ (2)

Am(2) ZH(2) 06.04.20.

5).

5) Feladat (10 pont).
a) Legyen g kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény! Írjuk a g változója helyére a $2x + y^3$ kifejezést ($g(t)$, $t = 2x + y^3$) ! Legyen az így kapott kétváltozós függvény $u(x, y)$!

$$u'_x = ? \qquad u'_y = ?$$

$$u''_{xx} = ? \qquad u''_{xy} = ? \qquad u''_{yx} = ?$$

Írja fel az u függvény $P(0, 1)$ pontbeli Hesse mátrixát!

$u = g(2x+y^3)$

$u'_x = \dot{g}(t) \cdot 2$ (1)

$u'_y = \dot{g}(t)\, 3y^2$ (1)

$u''_{xx} = \ddot{g}(t) \cdot 2 \cdot 2.$ (1)

$u''_{xy} = \ddot{g}(t) \cdot 2 \cdot 3y^2 = u''_{yx}$ (2)

$u''_{yy} = \ddot{g}(t)\, 3y^2\, 3y^2 + \dot{g}(t)\, 6y$ (2)

ahol $t = 2x+y^3$ -et kell írni.

$$\underline{\underline{H}}(0,1) = \begin{bmatrix} 4 \cdot \ddot{g}(1) & 6\ddot{g}(1) \\ 6\ddot{g}(1) & 9\ddot{g}(1) + 6\dot{g}(1) \end{bmatrix}$$ (3)

Am(2)ZH(2)06.04.20.

6).

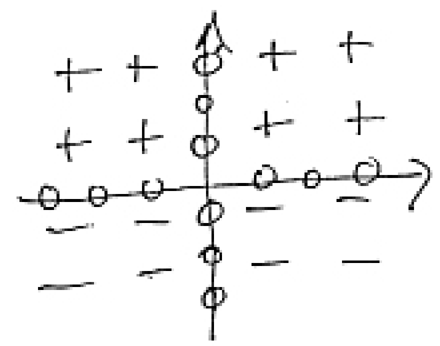
6) Feladat (12 pont).
Van-e f-nek lokális szélsőértéke, és ha igen, akkor milyen jellegű, ha

$$f(x, y) = x^2 y^5$$

$f'_x = 2xy^5$ (1) $f'_x = 0$ és $f'_y = 0$ (1)

$f'_y = 5x^2y^4$ (1) $\Rightarrow$ $x = 0$ y tetsz.

v. x tetsz. $y = 0$. (2)



Az origóban ill. az x tengely pontjaiban nincs lok. szélsőérték, mert ezen pontok minden környezetében van a nulla fv. értéknél nagyobb és kisebb fv. érték is. (3)

Az y tengely pozitív felén lok. min. van.

Az y tengely negatív felén lok. max. van. (2)

AM(2) ZH(2) 06.04.20.

Feladat (10 pont).
Vizsgálja meg az alábbi rekurzív egyenlőtlenség $n = 3^k$ részsorozatának a nagyrendjét, ha $C > 0$ adott:

$$f(n) \le 2f(n/3) + Cn$$

$$f(n) \le 2f(n/3) + Cn \qquad n = 3^k$$

$$f(3^k) \le 2f(3^{k-1}) + C\cdot 3^k \overset{1}{\le}$$

$$\le 2\left(2f(3^{k-2}) + C\cdot 3^{k-1}\right) + C\cdot 3^k \; (2)$$

$$= 2^2 f(3^{k-2}) + C\left(2\cdot 3^{k-1} + 3^k\right) \le \; (1)$$

$$\le 2^2\left(2f(3^{k-3}) + C\cdot 3^{k-2}\right) + C\left(2\cdot 3^{k-1} + 3^k\right) =$$

$$= 2^3 f(3^{k-3}) + C\left(2^2\cdot 3^{k-2} + 2\cdot 3^{k-1} + 3^k\right)$$

$$\le \dots \le 2^k f(3^{k-k}) + C\left(3^k + 2\cdot 3^{k-1} + \dots + 3\cdot 2^{k-1}\right) \; (2)$$

$$= 2^k f(1) + C\cdot 3^k \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k - 1}{\frac{2}{3} - 1} \; (2)$$

$$= 2^k f(1) + C\cdot 3^k\cdot 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) \le \; (1)$$

$$3^k f(1) + 3C\cdot 3^k = (3C+1)n$$

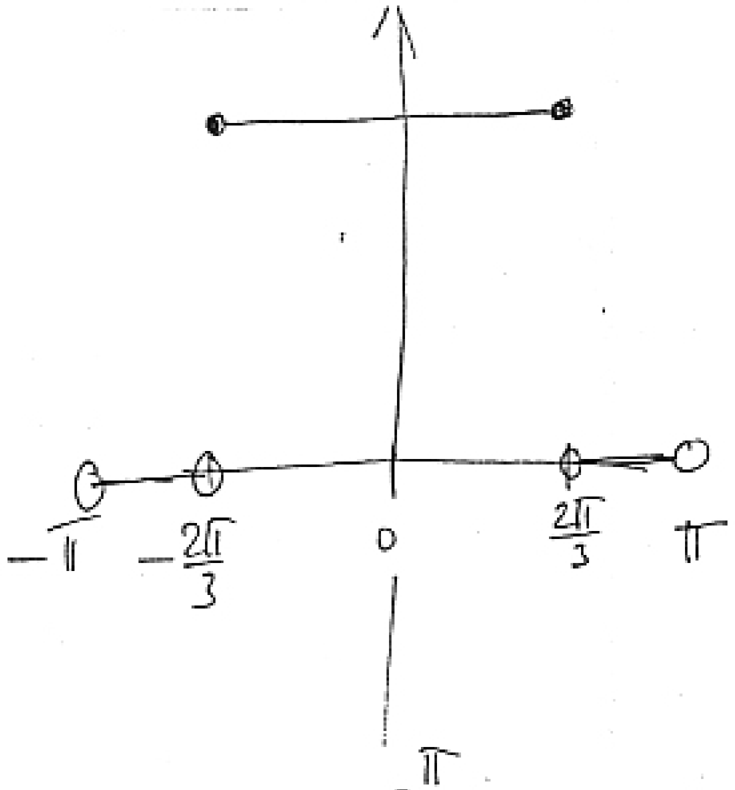
$$\Rightarrow f(n) = O(n) \quad (1)$$

AM(2) ZH2 06.04.20.

7) Feladat (16 pont).
Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{ha } |x| \le 2\pi/3, \\ 0, & \text{ha } 2\pi/3 < |x| \le \pi, \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

függvényFourier sorát!
Milyen kapcsolat van az f függvény és a Fourier sora között?



f páros $\Rightarrow b_k = 0$. (2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\, 2\int_0^{\frac{2\pi}{3}} 5\,dx = \frac{10}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{20}{3} \; (2)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi/3} 5\cos kx\,dx \; (1)$$

$$= \frac{10}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi/3} = \frac{10}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\sin k\cdot\frac{2\pi}{3} \overset{(3)}{=}$$

$$= \begin{cases} \frac{10}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{ha } k = 3l+1 \\ -\frac{10}{\pi}\frac{1}{k}\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{ha } k = 3l+2 \\ 0, & \text{ha } k = 3l. \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx \overset{(2)}{=} \frac{10}{3} + \frac{10}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x + \dots\right) \; (2)$$

$\Phi(x) = f(x)$, ahol f folyt és $\Phi(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ (2)

PÓT.

An(2) ZH(2) 06.04.20.

9) Feladat (10 pont).
Írja fel a

$$f(x) = \frac{1}{1-3x}$$

$x_0 = 0$ és az $x_0 = -1$ körüli Taylor sorait, azok konvergencia sugarait!

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots \quad (1) \quad , \text{ ha } |q| < 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 3^2x^2 + \dots \quad (1) \quad \text{ha } |x| < \frac{1}{3} = R_1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{1-3x} = \frac{1}{1-3(x+1)+3} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{3}{4}(x+1)} = \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{4}(x+1) + \frac{3^2}{4^2}(x+1)^2 + \frac{3^3}{4^3}(x+1)^3 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2}(x+1) + \frac{3^2}{4^3}(x+1)^2 + \frac{3^3}{4^4}(x+1)^3 + \dots \quad (2)$$

$$\text{ha } \left|\frac{3}{4}(x+1)\right| < 1 \implies |x+1| < \frac{4}{3} = R_2 \quad (2)$$