A számítástudomány alapjai

1. pótZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését: ennek feltétele az is, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása is kiderüljön a dolgozatból.
Természetesen az alább ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott részpontszámok járnak.

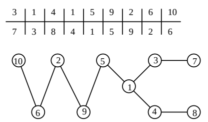
1. Van egy 32 lapos, kártyacsomagunk, amiben a lapok sorban 1-től 32-ig vannak számozva. Az így rendezett csomagot középen szétválasztjuk két, 16 lapos csomagra,majd tetszőleges sorrendben, egyenként elvesszük a lapokat a két csomag tetejéről. Az elvett kártyákat (az elvétel sorrendjében) egymásra helyezve egy 32 lapos paklit képezünk. Hányféle lehet az így kapott kártyacsomagban a lapok sorrendje?

   A keverés után létrejövő pakli annyiféle lehet, ahányféle sorrendben el tudjuk venni a lapokat az egyes csomagok tetejéről, (1 pont)
   azaz annyiféle, amennyi az olyan, 32 jelből álló sorrendek száma, amik pontosan 16 „*bal*” és 16 „*jobb*” elemet tartalmaznak. (3 pont)
   Ez utóbbi szám pedig nem más, mint 32 elem olyan ismétléses permutációinak száma, amiben kétféle elem mindegyikéből $16-16$ van. (3 pont)
   Az ilyen ismétléses permutációk száma a tanultak szerint $\frac{32!}{16!^2}$, (2 pont)
   ennyi tehát a feladat kérdésére is a válasz. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy az F fának 17 elsőfokú csúcsa van, és hogy F bármely csúcsának legfeljebb négy a fokszáma. Legfeljebb hány harmadfokú csúcsa lehet F-nek?

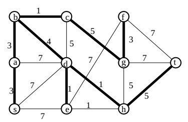
   Legyen F másodfokú csúcsainak száma n_2, a harmadfokúaké n_3, a negyedfokúaké pedig n_4! (1 pont)
   Ekkor F-nek $17+n_2+n_3+n_4$ csúcsa van, (1 pont)
   éleinek száma ennél eggyel kevesebb, azaz $16+n_2+n_3+n_4$, (3 pont)
   fokszámainak összege pedig a tanultak alapján ennek kétszerese: $17+2\cdot n_2+3\cdot n_3+4\cdot n_4 = 2(16+n_2+n_3+n_4)$. (3 pont)
   Innen $n_3+2\cdot n_4 = 15$ adódik, (1 pont)
   tehát F-nek legfeljebb 15 harmadfokú csúcsa lehet, (1 pont)
   és pontosan akkor van ennyi, ha F-nek egyáltalán nincs negyedfokú csúcsa. (1 pont)

3. Milyen hosszú út vezet a 31415926 Prüfer kódú fának a legnagyobb sorszámú csúcsából a második legnagyobb sorszámú csúcsába?

   A Prüfer kód hossza 8, ezért a keresett fa csúcsai 1-től 10-ig vannak számozva, és a Prüfer kódot kiegészíthetjük az utolsónak feljegyzett 10-es csúccsal. (1 pont)
   Az órán ismertetett módszerrel sorra meghatározzuk, melyik leveleket töröltük, (4 pont)
   ezzel megkapjuk a fa éleit a törlések sorrendjében. (2 pont)
   Az ábrán látható a felrajzolt fa, (1 pont)
   amiben a 10-es csúcsából a 9-es csúcsába egy 3 hosszúságú út vezet. (2 pont)

4. Határozzunk meg a lenti ábrán látható gráf irányítatlan változatában egy minimális súlyú feszítőfát és állapítsuk meg annak súlyát. (Itt az élekre írt számok az adott él súlyát jelentik.)

   Kruskal algoritmusa alapján, az élekről növekvő súlysorrendben, mohó módon eldöntve, hogy bevegyük-e a fába a kapunk meg egy minimális súlyú feszítőfát. (3 pont)
   Helyes ábra egy jó fáról: (5 pont)
   A minimális súlyú feszítőfák bármelyikének súlya tehát 26. (2 pont)

5. Legyen F és H a K_{17} teljes gráf két, közös él nélküli feszítőfája. Tegyük fel, hogy G a K_{17} gráf olyan részgráfja, ami F minden élét tartalmazza, de H-ból egyetlen egyet sem. Bizonyítsuk be, hogy G-nek pontosan akkor van Euler-körsétája, ha a $\overline{G}$ komplementergráfnak van Euler-körsétája!

   Mivel F a G részgráfja, ezért G összefüggő. (1 pont)
   Ezért, az órán tanult tétel szerint G-nek pontosan akkor van Euler-körsétája, ha G-ben minden fokszám páros. (2 pont)
   Hasonlóan, H a $\overline{G}$ részgráfja, ezért $\overline{G}$ is összefüggő. (1 pont)
   Eszerint $\overline{G}$-nek pontosan akkor van Euler-körsétája, ha $\overline{G}$-ben minden fokszám páros. (1 pont)
   Ha G egy v csúcsának fokszáma k, akkor a $\overline{G}$ komplementergráfban v foka $16-k$ lesz, (1 pont)
   hisz a v-től különböző 16 pont közül pontosan azokkal lesz összekötve, amik nem szomszédai v-nek G-ben. (1 pont)
   Márpedig k pontosan akkor páros, ha $16-k$ páros, (1 pont)
   ezért pontosan akkor lesz G minden csúcsának páros a foka, ha ugyanez igaz $\overline{G}$-re is, (1 pont)
   Innen pedig közvetlenül adódik a feladat állítása. (1 pont)

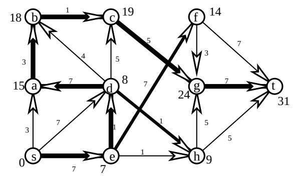
6. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van öt olyan éle, amik törlése után G már nem lesz összefüggő. Bizonyítsuk be, hogy G-nek nem létezhet három olyan Hamilton köre, amelyek közülük semelyik kettőnek sincs közös éle!

   Legyen $X \subset V(G)$ az egyik olyan komponens csúcsainak halmaza, ami a feladatban említett öt él elhagyása után keletkezik! (3 pont)
   Világos, hogy $V(G)\setminus X \neq \emptyset$, és X és $V(G)\setminus X$ között legfeljebb öt él vezet G-ben. (2 pont)
   Márpedig, ha volna G-ben három éldiszjunkt Hamilton kör, akkor minden egyes ilyen Hamilton kör legalább két olyan élt tartalmazna, ami X és $V(G)\setminus X$ között vezet. (3 pont)
   Azt kaptuk, hogy ekkor összesen legalább hat élnek kell G-ben X-t elhagynia, (1 pont)
   ami ellentmondás, és a feladat állításának igazolása. (1 pont)

7. Tegyük fel, hogy a G összefüggő, síkbarajzolható gráfnak és G^* duálisának együtt összesen 2006 csúcsa van. Határozzuk meg G^* éleinek számát!

   A G gráf tartományai és a G^* gráf csúcsai között a tanultak szerint létezik egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. (2 pont)
   Eszerint ha G-nek t tartománya és n csúcsa van, akkor $n+t = 2006$. (1 pont)
   Mivel a G sr gráf összefüggő, (1 pont)
   ezért igaz rá az Euler formula, (1 pont)
   ahonnan $2006 = n+t = e+2$ adódik, ahol e jelöli G élszámát. (2 pont)
   Innen G éleinek száma $e = 2004$. (1 pont)
   Tudjuk, hogy G^*-nak ugyanannyi éle van, mint G-nek, (1 pont)
   tehát a feladat kérdésére 2004 a válasz. (1 pont)

8. Határozzuk meg az ábrán látható PERT feladat a végrehajtásához szükséges minimális t időt és azt az utolsó t' időpontot, amikor még megkezdhetjük a h tevékenység végrehajtását úgy, hogy emellett még lehetséges legyen a a PERT feladat t időben történő végrehajtása!

   A gráf egy topologikus sorrendje szerint meghatároztuk a legkorábbi kezdési időpontokat, amit a csúcsokba írt számok jelölnek, és az ezen időpontokat meghatározó éleket megvastagítottuk. (4 pont)
   Eszerint a szükséges minimális idő $t = 31$. (2 pont)
   A h feladat késedelmes végrehajtása miatt csak a g és t feladatok csúszhatnak. (1 pont)
   Mivel mindkettő rajta van a kritikus úton, ezért ezeknek a feladatoknak nem szabad késedelmet szenvedniük, (1 pont)
   vagyis $t'+5 \le 24$ ill. $t'+5 \le 31$ teljesül, (1 pont)
   ahonnan $t' \le 19$ következik. Ha a h tevékenységet $T = 19$-ben elkezdve az említett feladatok mindegyike befejezhető úgy, hogy a PERT feladat végrehajtási ideje 31 legyen, ezért $t' = 19$. (1 pont)