ANALÍZIS(2) **Vizsgadolgozat** **2010.01.04.**

Mérnök Informatikus szak — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (15 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenletek általános megoldását!

$$a)\quad y''' - 3y'' = 0, \qquad b)\quad y''' - 3y'' = 2, \qquad c)\quad y''' - 3y'' = \sin(3x).$$

Melyik esetben lép fel külső rezonancia? (Válaszát indokolja!)

2. feladat (15 pont)

a) Definiálja egy x_0-ban végtelen sokszor differenciálható $f(x)$ függvény x_0 bázispontú Taylor-sorát!

b) Mondja ki a függvény és Taylor sorának egyezőségére tanult elégséges tételt.

c) A definíció segítségével írja föl a $\sin(x)$ függvény origó középpontú Taylor-sorát, és igazolja, hogy a Taylor-sor minenütt előállítja a függvényt!

3. feladat (15 pont)

$$f(x) = \frac{1}{1+2x}, \qquad g(x) = \frac{1}{(1+2x)^2}.$$

Határozza meg f és g origó középpontú Taylor-sorát, és adja meg mindkét esetben a konvergenciasugarat!

4. feladat (15 pont)

a) Legyen az $f(x,y)$ függvény az (x_0, y_0) pont egy környezetében értelmezve. Definiálja f totális deriváltját és parciális deriváltjait az (x_0, y_0) pontban!

b) Milyen kapcsolat van a parciális deriváltak és a totális derivált között? (Két tanult tételt mondjon ki!)

c)

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy}{1+y^2}, \qquad \operatorname{grad} f|_{(1,2)} = ?$$

5. feladat (14 pont)*

Legyen $f(x,y)=xy^2$, és legyen T az $O(0,0)$, $A(2,0)$ és $B(0,1)$ pontok által meghatározott háromszög.

a) Írja föl az $\int_T f dT$ kettős integrált kétféleképpen kétszeres integrálként!

b) Az egyik módon számolja ki az integrált!

6. feladat (13 pont)*

a) Írja föl a Cauchy–Riemann egyenleteket, és ismertesse az $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ komplex függvény differenciálhatóságáról és deriváltjának kiszámolásáról tanult tételt! $(z=x+iy)$

b) Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z)=z\cdot\overline{z}$ komplex függvény?

7. feladat (13 pont)*

Legyen L az origó középpontú, 2 sugarú körnek az első síknegyedbe ($x\geq 0$, $y\geq 0$) eső negyede, pozitív irányítással. Határozza meg a következő komplex vonalintegrálok értékét algebrai alakban!

$$a)\qquad \int_L |z|^2 dz = ? \qquad\qquad b)\qquad \int_L z^2 dz = ?$$

Pótfeladatok. A következő feladatokat csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (10 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{xy}{1+x^2}, \qquad\qquad y(x) = ?$$

9. feladat (10 pont)

Írja fel az

$$a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}, \qquad a_0 = 6, \qquad a_1 = -2$$

rekurzióval adott sorozat általános elemét!

A *-gal jelölt feladatokból legalább 16 pontot el kell érni!