1. feladat (16 pont)
Állapítsa meg az alábbi hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ 2^n}\ (x-2)^n$$

Mo. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|(-1)^n|}{n\ 2^n}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\ 2} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{2} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{R} \quad \Longrightarrow \quad R = 2,$
tehát $|x-2| < 2$ esetén a sor konvergens **(3p)**

$x = 4 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \cdot 2^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergens (nem abszolút konvergens) **(3p)**

$x = 0 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \cdot (-2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens **(3p)**

KT (konvergenciatartomány): $(0, 4]$ **(2p)**

---

2. feladat (13 pont)
Közelítse az

$$\int_0^1 \sin\left(2x^2\right)\, \mathrm{d}x$$

integrált a függény hatodfokú, 0-körüli Taylor-polinomjának integráljával! Adjon becslést a hibára!

Mo. A sin függvény Taylor-sora alapján **(1p)** .

$$f(x) = \sin\left(2x^2\right) \overset{(\mathbf{5p})}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{4n+2}.$$

$R = \infty$ (az adott intervallumon alkalmazható a sorfejtés). Tehát:

$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \left(\int_0^1 2x^2 - \frac{8}{3!} \cdot x^6 + \frac{32}{5!} x^{10} \pm \ldots\ \mathrm{d}x \right) =$$
$$\overset{(\mathbf{2p})}{=} \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{42} + \frac{32}{120 \cdot 11} \pm \ldots \right).$$

Itt az első két tag adja a hatodfokú Taylor-polinom integrálját, a következő tag pedig a hibát (Leibniz-sor). Így az integrál közelítése $20/42 = 0.48$, a hiba pedig nem nagyobb, mint $32/1320 = 2.4 \times 10^{-2}$. **(4p)**

3. feladat (24 pont)
Hol folytonos az alábbi függvény? Számolja ki a parciális deriváltjait! Hol lehetnek a függvénynek lokális szélsőértékhelyei, vagyis melyek a függvény stacionárius pontjai?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{3x^2+5y^2}\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mo. $(x,y) \neq (0,0)$ esetén f folytonos, mert folytonos függvények összetétele **(2p)** . Vizsgálandó a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ határérték! Az $x_n = r_n \cos\varphi_n$, $y_n = r_n \sin\varphi_n$ sorozatok mentén **(2p)** :

$$\lim_{r_n\to 0} f(r_n\cos\varphi_n, r_n\sin\varphi_n) = \lim_{r_n\to 0} r_n^2 \underbrace{\frac{4\cos^2\varphi_n \sin^2\varphi_n}{3+2\sin^2\varphi_n}}_{|\cdot|<\frac{4}{3}} = 0 \quad \textbf{(4p)}$$

így a függvény az origóban is folytonos. Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$f'_x(x,y) \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{8xy^2(3x^2+5y^2) - 4x^2y^2\cdot 6x}{(3x^2+5y^2)^2} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{40xy^4}{(3x^2+5y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{8x^2y(3x^2+5y^2) - 4x^2y^2\cdot 10y}{(3x^2+5y^2)^2} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{24x^4y}{(3x^2+5y^2)^2}.$$

$(x,y) = (0,0)$ esetén $f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0)$ **(4p)** . A parciális deriváltak értéke csak a tengelyeken 0, tehát csak ott lehetnek lokális szélsőértékhelyek. **(4p)**

---

4. feladat (8+14=22 pont)
a) Mikor mondjuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontban totálisan differenciálható? Adjon elégséges feltételt a totális differenciálhatóságra.
b) Határozza meg az

$$f(x,y) = \sin((x-2y)^3) \; - \; 12x$$

függvény $(2,1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét! Számolja ki az f függvény $(-3,4)$ vektorral párhuzamos iránymenti deriváltját a $(2,1)$ pontban.

Mo. a) Definíció **(4p)** . Ha a függvény és parciális deriváltjai folytonosak az (x_0, y_0) pontban, akkor a függvény az (x_0, y_0) pontban totálisan differenciálható. **(4p)**
b) $f(2,1) = -24$, **(1p)** $f'_x = 3(x-2y)^2\cos(x-2y)^3 - 12$, **(2p)** $f'_y = -6(x-2y)^2\cos(x-2y)^3$ **(2p)** tehát a grad $f(2,1) = (-12, 0)$ **(2p)** , így az érintősík egyenlete: $z = -12x$. **(2p)**

Az adott irányvektor irányába mutató egységvektor
$\underline{e} = (-3/5)\underline{i} + (4/5)\underline{j}$) **(2p)** . Tehát az iránymenti derivált

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \frac{36}{5}. \qquad \textbf{(3p)}$$

---

5. feladat (15 pont)
Az integrálás sorrendjének felcserélésével számoljuk ki az alábbi integrált:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{1+x^3}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Mo.

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{1+x^3}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \overset{\textbf{(5p)}}{=} \int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{1+x^3}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=}$$

$$= \int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\ \mathrm{d}x \overset{\textbf{(5p)}}{=} \frac{1}{3}\left[\frac{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{52}{9}.$$

---

6. feladat (10 pont)
Határozza meg az $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = x^2 + y$ felületek által határolt tartomány térfogatát.

Mo.

$$\iiint_V 1dV \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{x^2+y} 1\,dz\,dy\,dx \overset{\textbf{(3p)}}{=} \int_0^1 \int_0^2 x^2+y\,dy\,dx \overset{\textbf{(3p)}}{=} \int_0^1 2x^2+2\,dx \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{8}{3}.$$

IMSC feladat (15 IMSC pont) Adott a síkon n tömegpont $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$, $m_1, ..., m_n$ tömegekkel. A sík mely pontjára vonatkoztatva lesz a rendszer tehetetlenségi nyomatéka minimális? (n darab egyenként m_i tömegű, a vonatkoztatási ponttól egyenként r_i távolságra elhelyezett tömegpontból álló merev test tehetetlenségi nyomatéka $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$.

Mo. Keressük az $f(x,y)=\sum_{i=1}^{n} m_i\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right)$ minimumát a síkon **(4p)** . Lokális szélsőértékhely ott lehet, ahol a gradiens 0 **(2p)** : $f'_x=\sum_{i=1}^{n} m_i 2(x-x_i)=0$, ha $x=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ és $f'_y=\sum_{i=1}^{n} m_i 2(y-y_i)=0$, ha $y=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ **(4p)** . Ebben a pontban lokális minimum van, hiszen $f''_{xx}=\sum_{i=1}^{n} 2m_i=f''_{yy}>0$, $f''_{xy}=0$, így $f''_{xx}f''_{yy}-\left(f''_{xy}\right)^2>0$ **(3p)** . Mivel az egész síkon ez az egyetlen lokális szélsőértékhely, így ez egyben abszolút minimum is. **(2p)**
