/

ANALÍZIS(2)
Műszaki Informatika szak

I. ZÁRTHELYI
B kurzus

2002. március 14.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (6 pont)

Írja fel az alábbi rekurzió általános megoldását!

$$f(n) = \frac{5}{2}\,f(n-1) + \frac{3}{2}\,f(n-2)$$

$f(n) = q^n$. $(q \neq 0)$: $q^2 = \frac{5}{2}q + \frac{3}{2}$ $\longrightarrow$ $q_1 = 3$, $q_2 = -\frac{1}{2}$

$f(n) = \alpha\, 3^n + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

2. feladat (10 pont)

$$y' = \frac{(y^2-5)}{y^3\,\sqrt{x^2-1}\ \mathrm{arch}^2\,x}$$

Adja meg a differenciálegyenlet összes megoldását!
Van-e az $y(2) = \sqrt{5}$ kezdeti értékhez tartozó megoldása?

$x > 1$ és $y \neq 0$; $y = \pm\sqrt{5}$ megoldás

$y^2 \neq 5$: $\int \underbrace{\frac{y^3}{y^2-5}}_{= y + \frac{5}{2}\frac{2y}{y^2-5}} dy = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \underbrace{(\mathrm{arch}\,x)^{-2}}_{f' f^{-2}} dx$

$\frac{y^2}{2} + \frac{5}{2}\ln|y^2-5| = \frac{-1}{\mathrm{arch}\,x} + C$ ill. $y = \pm\sqrt{5}$ az összes megoldás

$y(2) = \sqrt{5}$: $y \equiv \sqrt{5}$

3. feladat (12 pont)

a) Vezesse be az $u = \cos(x^2 y)$ új változót az alábbi differenciálegyenletbe:

$$x^2 y' + \sin(x^2 y)\,\cos(x^2 y) = -2x\,y$$

(Ne oldja meg a kapott egyenletet!)
Szeparábilis-e, lineáris-e az így nyert differenciálegyenlet?

b) Írja fel az elsőrendű, lineáris homogén differenciálegyenlet általános alakját és írjon fel a vele kapcsolatban tanult állítások közül kettőt!

a.) $u' = -\sin x^2y \cdot (2xy + x^2y')$

A de. átalakítva:

$\underbrace{\sin^2 x^2y}_{= 1-\cos^2 x^2y} \cos x^2y = -\sin x^2y\,(2xy + x^2y')$

$(1-u^2)\,u = u'$: szeparábilis d.e.
nem lineáris

b.) $y' + g(x)\,y = 0$

02.03.14. 1/1

b) A tanult tétel: (ebből kell 2 állítás)
folyt. (T)

a) Ha φ és ψ is megoldásai (4.6) differenciálegyenletnek, akkor $\varphi+\psi$ is megoldása (4.6)-nak. Ha egy φ függvény megoldása a (4.6) differenciálegyenletnek, akkor ennek a φ függvénynek a konstansszorosai is megoldások. Ezt röviden úgy mondhatjuk, hogy a (4.6) homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak.

b)

$$y' + g(x)y = 0, \qquad y(x_0) = y_0 \tag{4.7}$$

kezdetiérték problémának $\forall x_0 \in (\alpha,\beta), y_0 \in \mathbb{R}$ esetén van az (α,β) intervallumon értelmezett megoldása. (Ezt, a megoldás létezését garantáló állítást egzisztencia tételnek nevezzük.)

c) Ha φ és ψ is a (α,β) intervallumon értelmezett megoldásai a (4.7) kezdetiérték problémának, (vagyis grafikonjaik ugyanazon az (x_0,y_0) ponton haladnak át), akkor $\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in (\alpha,\beta)$.

(Ezt, a megoldás egyértelműségét garantáló állítást unicitás tételnek nevezzük.)

d) A (4.6) homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet megoldásai egydimenziós lineáris teret alkotnak, tehát a megoldások megadhatók egy $\varphi \neq 0$ elem konstansszorosaként.

4. feladat (20 pont)

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''' + y'' - 2y' = \cos x$$

b) Milyen alakban keresheti az alábbi differenciálegyenlet egyik megoldását?

$$y''' + y'' - 2y' = \operatorname{ch} 3x + x^2$$

(Nem kell megkeresnie!)

c) Írjon fel egy olyan harmadrendű, lineáris inhomogén differenciálegyenletet, amelynek megoldásai között szerepel $y = C_1 + C_2 \cos 3x - x$, ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$!

a) $\lambda^3+\lambda^2-2\lambda = \lambda(\lambda^2+\lambda-2) = \lambda(\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \qquad \lambda_1=0,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=1$

$y_H = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x}$

$y_{ip} = A\cos x + B\sin x$

$-2 \cdot \quad y_{ip}' = -A\sin x + B\cos x$

$1 \cdot \quad y_{ip}'' = -A\cos x - B\sin x$

$1 \cdot \quad y_{ip}''' = A\sin x - B\cos x$

$(-2B-B-A)\cos x + (2A+A-B)\sin x = \cos x$

$\left.\begin{array}{l} -3B-A=1 \\ 3A-B=0 \end{array}\right\} \quad A = -\frac{1}{10},\ B = -\frac{3}{10}$

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x} - \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$

b.) $f(x) = \dfrac{e^{3x}+e^{-3x}}{2} + x^2$

$y_{ip} = Ae^{3x} + Be^{-3x} + (Cx^2+Dx+E)x$

külső rezonancia

02.03.14. B/2.

c.) $y = \underbrace{C_1 + C_2 \cos 3x}_{y_H \text{ része}} \underbrace{- x}_{y_{ip}}$

(H) megoldásai: $e^{0x} = 1$, $\cos 3x$, $\sin 3x$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$; $\lambda_{2,3} = \pm j3$

A karakterisztikus egyenlet: $\lambda(\lambda - j3)(\lambda + j3) = \lambda(\lambda^2 + 9) = \lambda^3 + 9\lambda = 0$

(H): $y''' + 9y' = 0$ (I): $y''' + 9y' = \alpha$ alakú, mert ekkor a külső rezonancia miatt a kísérletező függvény:

$y_{ip} = Ax = -x$; $y_{ip}' = -1$; $y_{ip}''' = 0$

Behelyettesítve (I)-be: $\alpha = -9$ adódik

5. feladat (13 pont)

Írja fel az

$$\frac{dx}{dt} = +4x - 3y \qquad \frac{dy}{dt} = 3x + 4y$$

differenciálegyenlet rendszer összes valós megoldását!

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 + 9 = 0 \rightarrow 4 - \lambda = \pm 3j \rightarrow \lambda_{1,2} = 4 \pm 3j$$

$$\left.\begin{matrix} 4-(4+3j) & -3 \\ 3 & 4-(4+3j) \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -3j & -3 \;|\; 0 \\ \cancel{3} & \cancel{-3j \;|\; 0} \end{matrix} \qquad \underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$$

$$e^{\lambda_1 t}\underline{s}_1 = e^{(4+j3)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} = e^{4t}(\cos 3t + j \sin 3t)\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t}\cos 3t \\ e^{4t}\sin 3t \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} e^{4t}\sin 3t \\ -e^{4t}\cos 3t \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = C_1 \operatorname{Re} e^{\lambda_1 t}\underline{s}_1 + C_2 \operatorname{Im} e^{\lambda_1 t}\underline{s}_1 = C_1 \begin{pmatrix} e^{4t}\cos 3t \\ e^{4t}\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{4t}\sin 3t \\ -e^{4t}\cos 3t \end{pmatrix}$$

6. feladat (13 pont)

a) Rajzolja fel az

$$y' - e^{3y} = x$$

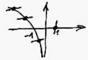
differenciálegyenletnek azt az izoklináját, amelynek pontjaiban teljesül a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele! Jelölje be az iránymezőt ezen izoklina néhány pontjában és az $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ pontban!

b) Az $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása a fenti differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(-4/3, 0)$ ponton.
Van-e ennek a megoldásnak inflexiója az $x = -4/3$ helyen?

a.) $y' = e^{3y} + x$ Izoklinák: $e^{3y} + x = c$

Lokális sz.é. létezésének szüks. feltétele ($c=0$): $e^{3y} + x = 0$

$y = \frac{1}{3}\ln(-x)$ pontjaiban teljesül



$x_0 = 1,\ y_0 = 0 \qquad y'(1) = e^0 + 1 = 2$

b.) $y(-\frac{4}{3}) = 0 \qquad y'(-\frac{4}{3}) = e^0 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$

$y'' = e^{3y}\,3y' + 1 \qquad y''(-\frac{4}{3}) = e^0 \cdot 3(-\frac{1}{3}) + 1 = 0$, tehát lehet infl. pont

$y''' = e^{3y}\,3y' \cdot 3y' + e^{3y}\,3y'' \qquad y'''(-\frac{4}{3}) = e^0\left(3(-\frac{1}{3})\right)^2 + e^0 \cdot 0 = 1 \neq 0$

Tehát van inflexiója az adott megoldásnak az $x = -\frac{4}{3}$ helyen.

7. feladat (7 pont)

Mit állíthatunk egy hatványsor abszolut és egyenletes konvergenciájáról?
Írja le a hatványsor differenciálásával kapcsolatban tanult állításokat!

(T) A hatványsor a konvergencia tartomány $\forall$ belső pontjában abszolút konvergens.

(T) Ha $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$, akkor a $\sum a_k x^k$ hatványsor egyenletesen konvergens $[\alpha, \beta]$-n.

(T) A hatványsor a konvergenciaintervallumának bármely belső x pontjában tagonként deriválható:

1. azaz $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ (újfent hatványsor)

2. és a két sor konvergenciasugara megegyezik.

8. feladat (13 pont)

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(3nx)}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?$

$\| f_n - f \| = ?$ (Uniform norma a $(-\infty, \infty)$ intervallumon.)

Egyenletesen konvergál-e az f_n az f-hez a $(-\infty, \infty)$-on?

b) $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) = ?$

$\| f_n' - g \| = ?$

Egyenletesen konvergál-e az f_n' a g-hez a $(-\infty, \infty)$-on?

a.) $f(x) \equiv 0$ ($\frac{\text{korlátos}}{\infty}$ alakú)

$\| f_n - f \| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\operatorname{arctg} 3nx|}{n+1} = \frac{\pi/2}{n+1}$

$f_n \rightrightarrows f$, mert $\| f_n - f \| \xrightarrow[\infty]{n} 0$, tehát normában konvergens b.) $g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{1+(3nx)^2} \cdot 3n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{1+9n^2x^2} = \begin{cases} 3, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$

$\|f_n' - g\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x) - g(x)| = \frac{3n}{n+1}$

Ugyanis $|f_n'(x) - g(x)| = \begin{cases} \frac{3}{n+1}, & \text{ha } x=0 \\ \frac{3n}{n+1} \frac{1}{1+9n^2x^2}, & \text{ha } x\neq 0 \end{cases}$

f_n' nem egyenletesen konvergál g-hez, mert g nem folytonos, de f_n' folytonos.

Vagy: $\|f_n' - g\| \xrightarrow[\infty]{n} 3 \neq 0 \Rightarrow$ nem egyenletes a konvergencia

9. feladat (13 pont)

$$\lim_{x\to 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(x-2) + (k+1)(x-2)}{(1+x)^k} = ?$$

A felhasznált tételeket írja le!

$\sum_1^\infty f_k(x)$

$x \in (1,3) = K_{2,1}: \quad |f_k(x)| \leq \frac{|\cos k(x-2)| + |(k+1)(x-2)|}{(1+x)^k} \leq \frac{1+k+1}{2^k} = b_k$

$\sum^\infty b_k$ konv., mert $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k+3)\, 2^k}{(k+2)\, 2^{k+1}} \xrightarrow[\infty]{k} \frac{1}{2} < 1 \overset{(T_1)}{\Longrightarrow} \sum_1^\infty f_k(x)$

egyenletesen konvergens $K_{2,1}$-ben $\overset{(T_2)}{\Longrightarrow}$ az összegfüggvény folytonos $x=2$-ben, tehát

$\lim_{x\to 2} \sum \ldots = \sum \lim_{x\to 2} \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1/3}{1-1/3}$

(T1) Weierstrass kritérium

Ha $\exists (b_k)$, hogy $\lvert f_k(x)\rvert \leq b_k$; $x \in H$; $k = 0,1,\ldots$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens numerikus sor, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens H-n.

02. 03. 14. B/5.

Ha $f_k \in C^0_{[a,b]}$ és $[a,b]$-n $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens ($s_n \rightrightarrows s$ $[a,b]$-n), akkor az $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ összegfüggvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon.

(M) A tétel jelentése:

$$\lim_{x\to x_0} s(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0) = s(x_0)$$

Pótfeladat (csak az elégségeshez javítjuk ki):

10. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$y' + \frac{6}{x} y = \ln 3x$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

(H): $y' = -\frac{6}{x} y \to \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{6}{x}\,dx$ ill. $y \equiv 0$ mo.

$\ln|y| = -6\ln|x| + C_1 \to |y| = e^{C_1} e^{\ln \frac{1}{x^6}}$

$\to y = \pm e^{C_1} \frac{1}{x^6}$ ill. $y \equiv 0$: $y_H = \frac{C}{x^6}$, $C \in \mathbb{R}$

(I): $y_{ip} = \frac{c(x)}{x^6}$

$y_{ip}' = \frac{c' x^6 - c \cdot 6x^5}{x^{12}} = \frac{c'}{x^6} - \frac{6c}{x^7}$

(I)-be behelyettesítve: $\left(\frac{c'}{x^6} - \frac{6c}{x^7}\right) + \frac{6}{x} \frac{c}{x^6} = \ln 3x$

$c' = x^6 \ln 3x$

$c = \int \underset{u'}{x^6} \underset{v}{\ln 3x}\,dx = \frac{x^7}{7} \ln 3x - \frac{1}{7}\int x^6\,dx = \frac{x^7}{7}\ln 3x - \frac{x^7}{49}$

$u = \frac{x^7}{7}$ $v' = \frac{1}{3x} \cdot 3$

$y_{ip} = \frac{x}{7} \ln 3x - \frac{x}{49}$

$y_{id} = y_H + y_{ip} = \ldots$

02.03.14. B/6.