Jelek és rendszerek 3. házi feladat

3.1. feladat

a. Átvitel számítása

F.I.:

$$h(t) = 8\varepsilon(t)e^{-0{,}5t}\cos(3t + 0{,}5)$$

Trigonometrikus azonosságot alkalmazva továbbírjuk:

$$h(t) = 8\varepsilon(t)e^{-0{,}5t}\cos(3t + 0{,}5) = 8\varepsilon(t)e^{-0{,}5t}\cos(3t)\cos(0{,}5) - 8\varepsilon(t)e^{-0{,}5t}\sin(3t)\sin(0{,}5) =$$
$$= 7{,}0207\ \varepsilon(t)e^{-0{,}5t}\cos(3t) - 3{,}8354\varepsilon(t)e^{-0{,}5t}\sin(3t)$$

Laplace-transzformációs táblázatot felhasználva az átviteli függvény:

$$\boldsymbol{H(s) = 7{,}0207\frac{s + 0{,}5}{(s + 0{,}5)^2 + 3^2} - 3{,}8354\frac{3}{(s + 0{,}5)^2 + 3^2}}$$

D.I.:

$$h[k] = 6\delta[k] +\ \varepsilon[k - 1]\{3 \cdot 0{,}4^k - 2 \cdot (-0{,}4)^k\}$$

Z-transzformációs táblázatot felhasználva az átviteli függvény:

$$\boldsymbol{H(z) = 6 + 3\frac{0{,}4}{z - 0{,}4} - 2\frac{-0{,}4}{z + 0{,}4}}$$

Mivel:

$$Z\{\varepsilon[k - 1]q^k\} = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon[k - 1]q^k z^{-k} = \sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon[p]\left(\frac{q}{z}\right)^{p+1} = \frac{q}{z}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{q}{z}\right)^p = \frac{q}{z}\frac{1}{1 - \frac{q}{z}} = \frac{q}{z - q}$$

p=k-1 helyettesítést alkalmazva.

b. Válaszjel számítása

D.I.:

$$u[k] = \varepsilon[k](5 - 6 \cdot (-0{,}2)^k)$$

Ebből a gerjesztés Z-transzformáltja:

$$U(z) = 5\frac{z}{z - 1} - 6\frac{z}{z + 0{,}2}$$

$$H(z) = 6 + 3\frac{0{,}4}{z - 0{,}4} - 2\frac{-0{,}4}{z + 0{,}4}$$

Ebből a kettőből:

$$Y(z) = U(z) \cdot H(z) = \left(5\frac{z}{z - 1} - 6\frac{z}{z + 0{,}2}\right)\left(6 + 3\frac{0{,}4}{z - 0{,}4} - 2\frac{-0{,}4}{z + 0{,}4}\right) = 30\frac{z}{z - 1} + 6\frac{z}{(z - 1)(z - 0{,}4)}$$

$$+4\frac{z}{(z-1)(z+0{,}4)}-36\frac{z}{z+0{,}2}-7{,}2\frac{z}{(z+0{,}2)(z-0{,}4)}-4{,}8\frac{z}{(z+0{,}2)(z+0{,}4)}=$$

$$=30\frac{z}{z-1}+6\left(\frac{\frac{5}{3}}{z-1}+\frac{-\frac{2}{3}}{z-0{,}4}\right)+4\left(\frac{\frac{5}{7}}{z-1}+\frac{\frac{2}{7}}{z+0{,}4}\right)-36\frac{z}{z+0{,}2}-7{,}2\left(\frac{\frac{1}{3}}{z+0{,}2}+\frac{\frac{2}{3}}{z-0{,}4}\right)-$$

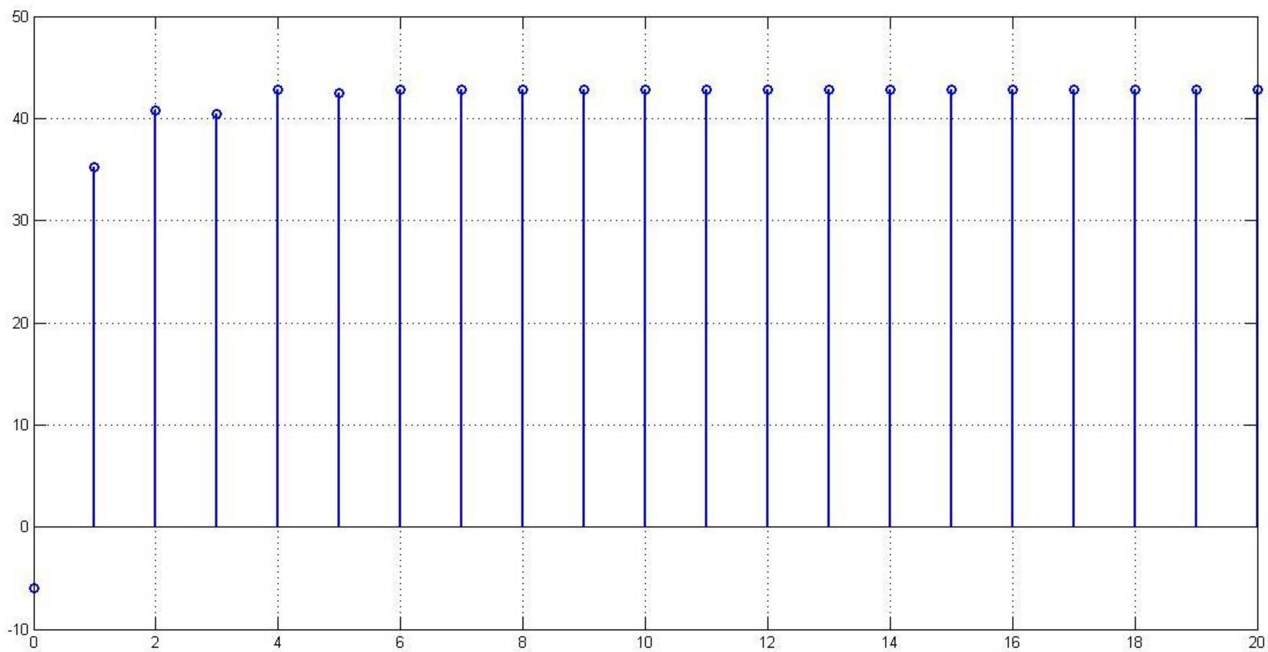
$$-4{,}8\left(\frac{-1}{z+0{,}2}+\frac{2}{z+0{,}4}\right)=\frac{30z}{z-1}-\frac{36z}{z+0{,}2}+\frac{90}{7}\frac{1}{z-1}-8{,}8\frac{1}{z-0{,}4}-\frac{296}{35}\frac{1}{z+0{,}4}+2{,}4\frac{1}{z+0{,}2}=$$

$$=30\frac{z}{z-1}-36\frac{z}{z+0{,}2}+\frac{90}{7}\frac{1}{z-1}-22\frac{0{,}4}{z-0{,}4}+\frac{148}{7}\frac{-0{,}4}{z+0{,}4}-12\frac{-0{,}2}{z+0{,}2}$$

Felhasználva egy inverz Z-táblázatot és az előző részfeladat eredményeit:

$$\boldsymbol{y[k]=\varepsilon[k]\left(30-36\cdot(-0,2)^{k}\right)+\varepsilon[k-1]\left(\frac{90}{7}-22\cdot 0,4^{k}+\frac{148}{7}(-0,4)^{k}-12(-0,2)^{k}\right)}$$

Ábrázolva MatLabban:



F.I.:

$$u(t)=6\varepsilon(t)-6\varepsilon(t-1{,}6)$$

Laplace-transzformáltja:

$$U(s)=\frac{6}{s}-\frac{6}{s}e^{-1{,}6s}$$

Innen:

$$Y(s)=U(s)\cdot H(s)=\left(\frac{6}{s}-\frac{6}{s}e^{-1{,}6s}\right)\cdot\left(7{,}0207\frac{s+0{,}5}{(s+0{,}5)^2+3^2}-3{,}8354\frac{3}{(s+0{,}5)^2+3^2}\right)=$$

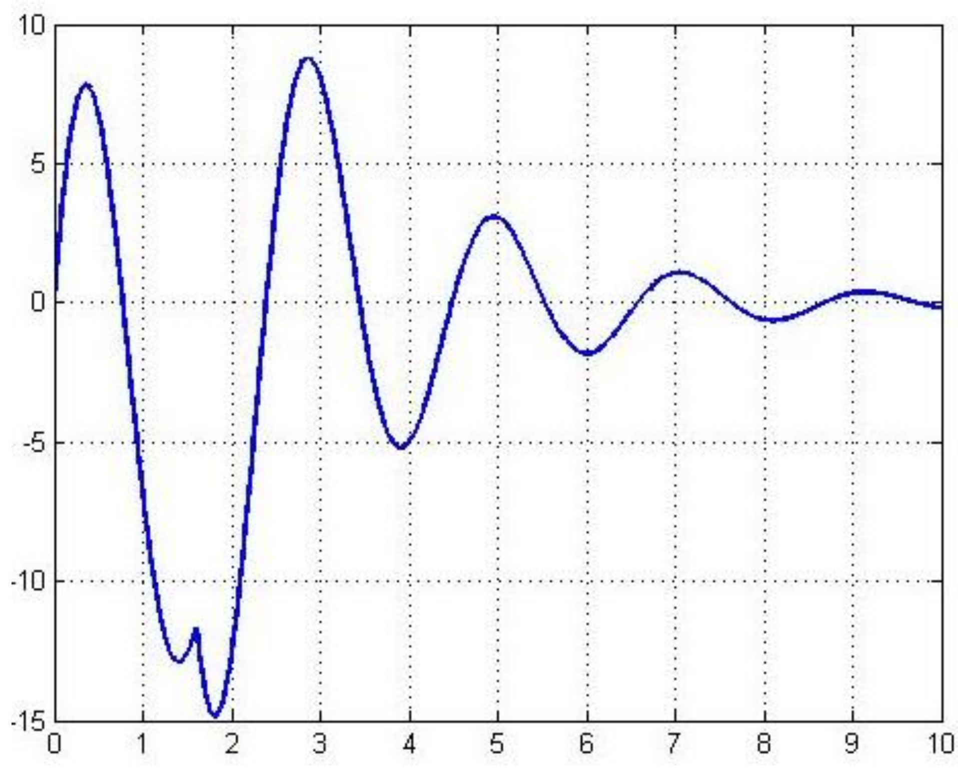
$$=7{,}0207\frac{6}{s}\frac{s+0{,}5}{(s+0{,}5)^2+3^2}-3{,}8354\frac{6}{s}\frac{3}{(s+0{,}5)^2+3^2}-7{,}0207\frac{6}{s}e^{-1{,}6s}\frac{s+0{,}5}{(s+0{,}5)^2+3^2}+$$

$$3{,}8354\frac{6}{s}e^{-1{,}6s}\frac{3}{(s+0{,}5)^2+3^2}$$

Ebből a válaszjel időfüggvénye, felhasználva a MatLab ilaplace függvényét:

$$y(t)=\varepsilon(t)(2{,}277-2{,}277e^{-0{,}5t}\cos(3t)+13{,}662e^{-0{,}5t}\sin(3t)-7{,}4635+7{,}4635e^{-0{,}5t}\cos(3t)+$$
$$1{,}2439e^{-0{,}5t}\sin(3t))-14{,}0414\varepsilon(t-1{,}6)e^{0{,}8-0{,}5t}\sin(3t-4{,}8)+$$
$$+21{,}0621\varepsilon(t-1{,}6)\left(\frac{4e^{0{,}8-0{,}5t}\left(\cos(3t-4{,}8)+\frac{1}{6}\sin(3t-4{,}8)\right)}{37}-\frac{4}{37}\right)-$$
$$-69{,}0372\varepsilon(t-1{,}6)\left(\frac{4e^{0{,}8-0{,}5t}\left(\cos(3t-4{,}8)+\frac{\sin(3t-4{,}8)}{6}\right)}{37}-\frac{4}{37}\right)=$$
$$=\varepsilon(t)(-5{,}1862+5{,}1862e^{-0{,}5t}\cos(3t)+14{,}9059e^{-0{,}5t}\sin(3t))$$
$$+\varepsilon(t-1{,}6)(-31{,}2497e^{-0{,}5t}\sin(3t-4{,}8))+5{,}0675e^{-0{,}5t}\cos(3t-4{,}8)+0{,}8446e^{-0{,}5t}\sin(3t-4{,}8)$$
$$-2{,}277-16{,}6103e^{-0{,}5t}\cos(3t-4{,}8)-2{,}7683e^{-0{,}5t}\sin(3t-4{,}8)+7{,}4635)=$$
$$=\boldsymbol{\varepsilon(t)\left(-5{,}1862+5{,}1862e^{-0{,}5t}\cos(3t)+14{,}9059e^{-0{,}5t}\sin(3t)\right)}+$$
$$\boldsymbol{\varepsilon(t-1{,}6)(5{,}1865-33{,}1734e^{-0{,}5t}\sin(3t-4{,}8)-11{,}5428e^{-0{,}5t}\cos(3t-4{,}8))}$$

Ábrázolva MatLabban:

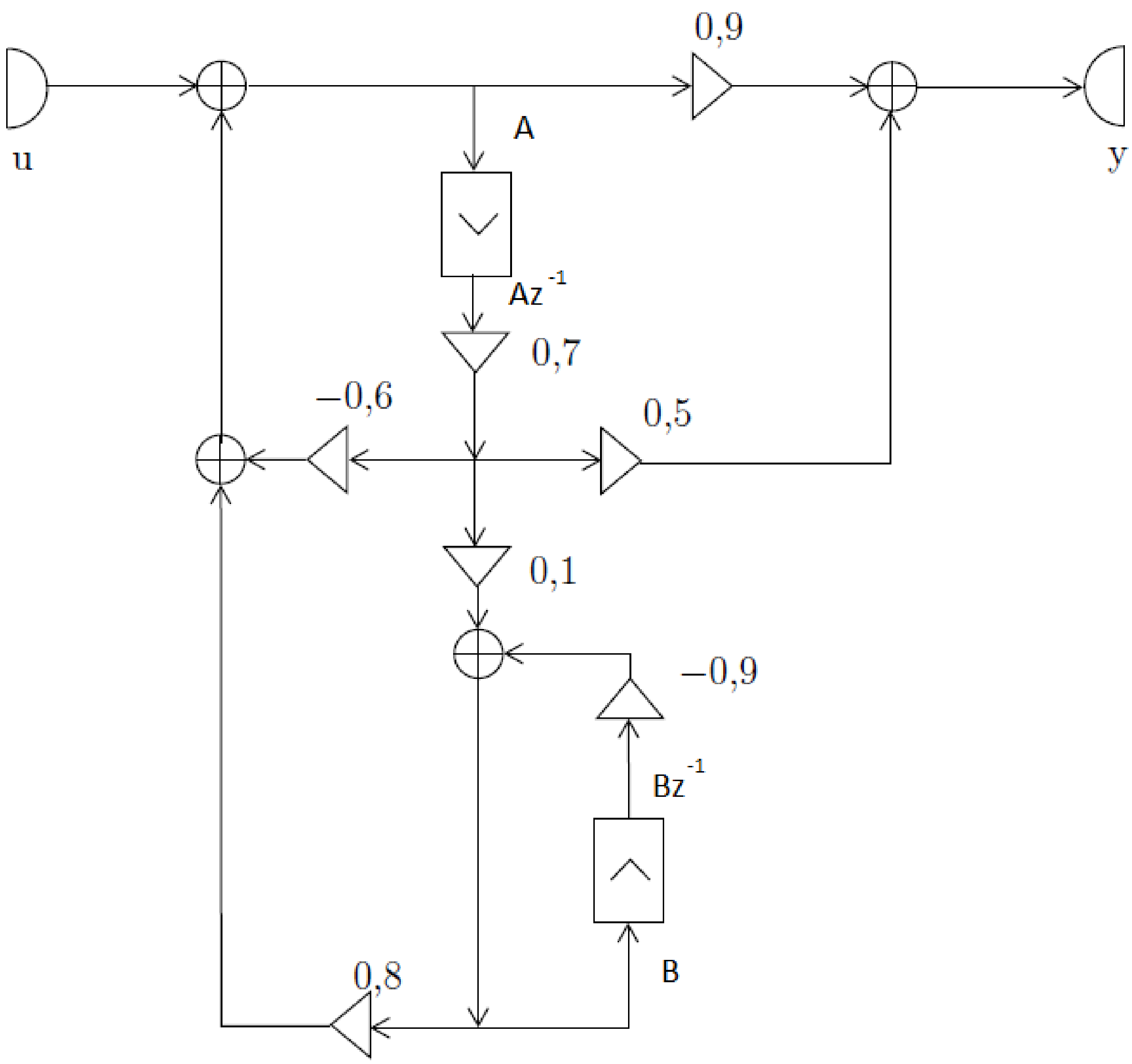


3.3. feladat

a. Pólus-zérus elrendezés, stabilitás

D.I.:

A jelfolyam-hálózatomba felvettem az alábbi A és B belső állapotváltozókat:



Ez alapján az egyenletek:

$$Y = 0{,}9A + 0{,}35Az^{-1}$$

$$A = -0{,}42Az^{-1} + 0{,}8B + U$$

$$B = 0{,}07Az^{-1} - 0{,}9Bz^{-1}$$

Először a B-t elimináljuk:

$$B(1 + 0{,}9z^{-1}) = 0{,}07Az^{-1}$$

$$B = \frac{0{,}07Az^{-1}}{1 + 0{,}9z^{-1}}$$

Így a második egyenlet így alakul:

$$A = -0{,}42Az^{-1} + \frac{0{,}056Az^{-1}}{1 + 0{,}9z^{-1}} + U$$

$$A\left(1 + 0{,}42z^{-1} - \frac{0{,}056z^{-1}}{1 + 0{,}9z^{-1}}\right) = U$$

$$A = \frac{U}{\left(1 + 0{,}42z^{-1} - \frac{0{,}056z^{-1}}{1 + 0{,}9z^{-1}}\right)}$$

Tehát:

$$Y = A(0{,}9 + 0{,}35z^{-1}) = \frac{U(0{,}9 + 0{,}35z^{-1})}{\left(1 + 0{,}42z^{-1} - \frac{0{,}056z^{-1}}{1 + 0{,}9z^{-1}}\right)}$$

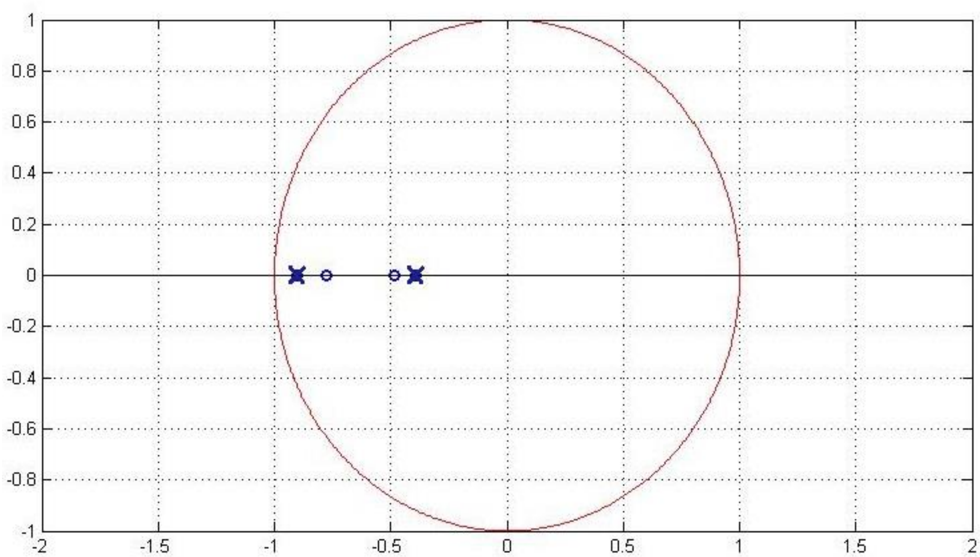
Így:

$$H(z) = \frac{(0{,}9 + 0{,}35z^{-1})}{\left(1 + 0{,}42z^{-1} - \frac{0{,}056z^{-1}}{1 + 0{,}9z^{-1}}\right)} = \frac{(0{,}9 + 0{,}35z^{-1})(1 + 0{,}9z^{-1})}{(1 + 0{,}9z^{-1} + 0{,}42z^{-1}(1 + 0{,}9z^{-1}) - 0{,}056z^{-1})} =$$

$$\frac{0{,}9 + 0{,}81z^{-1} + 0{,}35z^{-1} + 0{,}315z^{-2}}{1 + 1{,}264z^{-1} + 0{,}378z^{-2}} = \frac{0{,}9 + 1{,}16z^{-1} + 0{,}315z^{-2}}{1 + 1{,}264z^{-1} + 0{,}378z^{-2}} = \frac{0{,}9z^2 + 1{,}16z + 0{,}315}{z^2 + 1{,}264z + 0{,}378} =$$

$$= \frac{0{,}9\left(z + \frac{7}{18}\right)(z + 0{,}9)}{(z + 0{,}4856)(z + 0{,}778)}$$

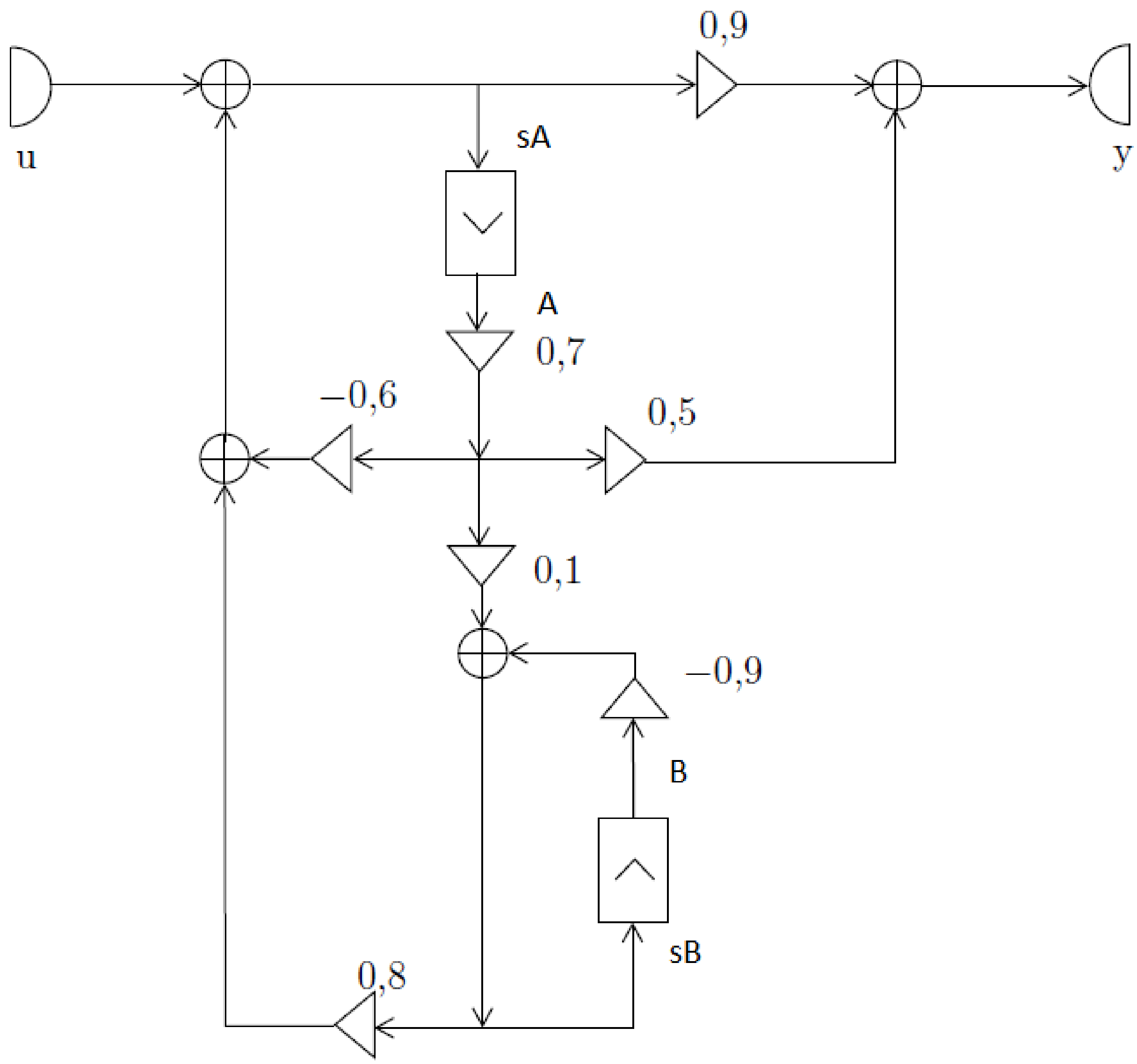
A pólus-zérus elrendezés:



Mivel a pólusok az egység sugarú körön belül helyezkednek el, és a két késleltető ki van vezetve a kimenetre, így a rendszer aszimptotikusan stabil.

F.I.:

A jelfolyam-hálózatomba felvettem az alábbi A és B belső állapotváltozókat:



Ezek alapján az egyenletek:

$$Y = 0{,}9sA + 0{,}35A$$

$$sA = -0{,}42A + 0{,}8sB + U$$

$$sB = 0{,}07A - 0{,}9B$$

Először B-t elimináljuk:

$$B = \frac{0{,}07A}{s + 0{,}9}$$

Ezt beírva a második egyenletbe az így fog alakulni:

$$sA = -0{,}42A + 0{,}8s\frac{0{,}07A}{s + 0{,}9} + U$$

$$A\left(s + 0{,}42 - 0{,}8s\frac{0{,}07}{s + 0{,}9}\right) = U$$

$$A = \frac{U}{\left(s + 0{,}42 - 0{,}8s\frac{0{,}07}{s + 0{,}9}\right)} = \frac{U(s + 0{,}9)}{(s(s + 0.9) + 0{,}42(s + 0{,}9) - 0{,}056s)}$$

$$= \frac{U(s + 0{,}9)}{(s^2 + 0.9s + 0{,}42s + 0{,}378 - 0{,}056s)} = \frac{U(s + 0{,}9)}{(s^2 + 1{,}264s + 0{,}378)}$$

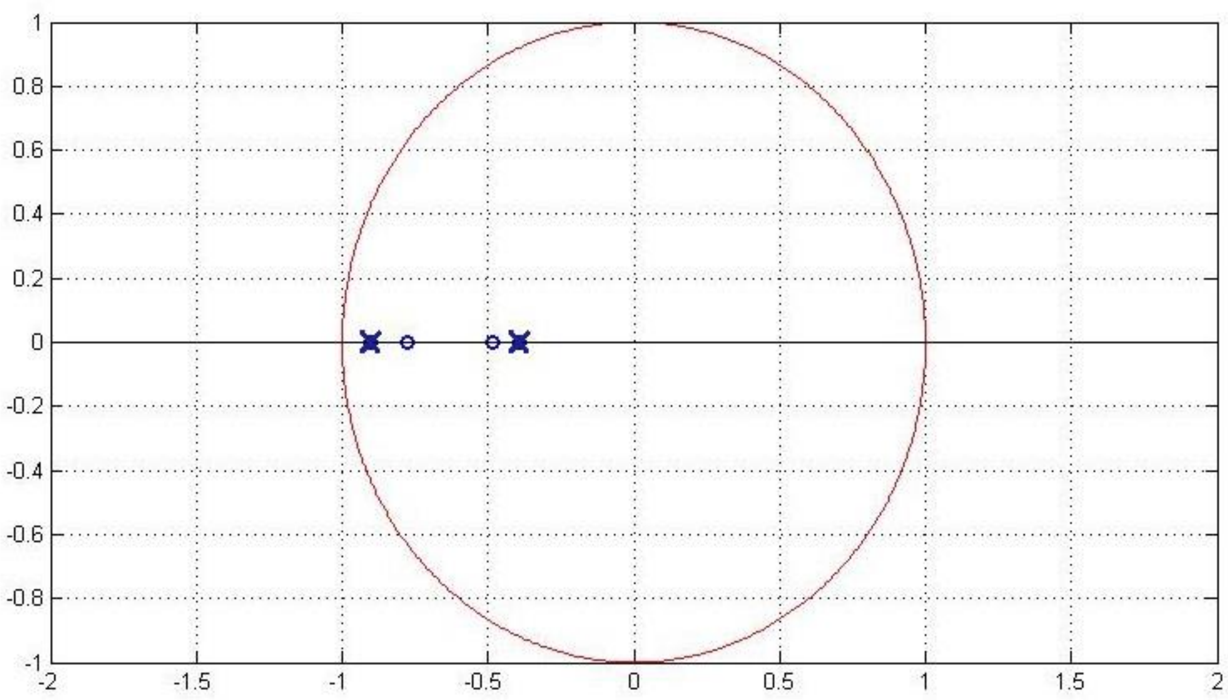
Így a rendszeregyenlet:

$$Y = A(0{,}9s + 0{,}35) = \frac{U(0.9s + 0{,}35)(s + 0{,}9)}{(s^2 + 1{,}264s + 0{,}378)}$$

Ebből az átviteli függvény:

$$H(s) = \frac{0{,}9\left(s + \frac{7}{18}\right)(s + 0{,}9)}{(s^2 + 1{,}264s + 0{,}378)}$$

A pólus-zérus elrendezés ábrázolva:



A két pólus: s = -0,4856, s = -0,778, mind a kettő valós része negatív, így a rendszer aszimptotikusan stabil.