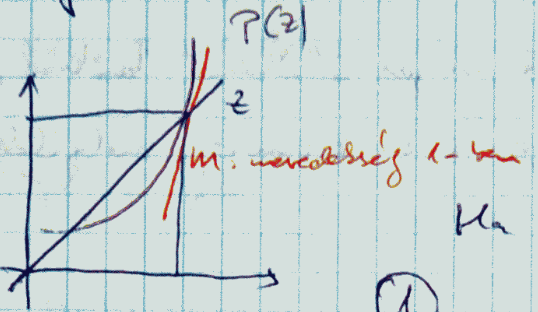
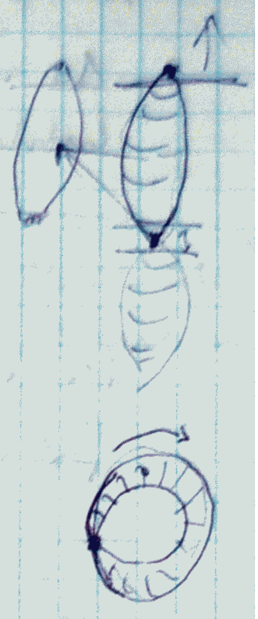
V. előadás

2010. XI. 08.

Tétel: Ha $P(z)$ az utódeloszlás generátorfgv-e, akkor a kihalás valószínűsége a

$P(z) = z$ fixpont-egyenlet legkisebb megoldása.





1_c

Ha $m > 1$, akkor $\pi < 1$

$\Downarrow$

fase hal ki.

Ha $m \leq 1$, akkor $\pi = 1$

A múltkori példa folytatása.

M/M/1 rendszer

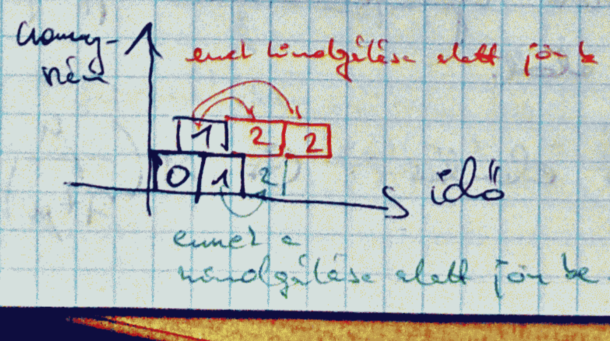
A csomagok érkezése között eltelő idő $Exp(\lambda)$, a kiszolgálási idők $exp(\mu)$ eloszlásúak.

Mi a valószínűsége, hogy egy foglaltsági idő alatt véges sok csomagot szolgál ki?

Az a jó, ha $P = 1$.

Ha $P < 1$, akkor van olyan foglaltsági idő, ami végtelen ideig tart. Az nem jó.

Készítünk hozzá egy elágazó folyamatot, s megnézzük, hogy mikor hal ki:



A következő elágazó folyamatot konstruáljuk.

Az utódok száma az egy ~~csomag~~ igény kiszolgálása alatt beérkezett új igények száma.

↓ Ez egy elágazó folyamat.

Ha az elágazó folyamat véges időben kihal, akkor egy foglaltsági időben véges sok csomag szolgálódik ki.

↓

{elágazó folyamat véges idő alatt kihal} = {a foglaltsági idő alatt kiszolgált csomagok száma véges}

$P_{<\infty}$: a véges idejű kihalás valószínűsége, azaz

$$P_{<\infty} = \pi = P(\exists n : Z_n = 0)$$

$P_{<\infty} = 1 \iff \pi = 1$ ← ez kell nekünk.

Ez pedig (1) alapján akkor van, ha $m \le 1$

(az utódeloszlás várható értéke).

m : ami a várható értéke, hogy egy igény kiszolgálása alatt hány új igény érkezik.

Legyen Y = a beérkezett igények száma egy igény kiszolgálása alatt.

Y geometriai eloszlású: $GEOM\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$

$$P(Y=k) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu} \qquad k=0,1,\dots$$

$m = EY$ *

Ha $X \sim GEOM(p)$, akkor $EX = \frac{1-p}{p}$ (pesszimista geometriai)

így $$EY = \frac{1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}}{\frac{\mu}{\lambda+\mu}} = \frac{\lambda}{\mu}$$

≤ 1 esetén a kiszolgálórendszer stabil lesz.

Vagyis $\lambda \leq \mu$

A kiszolgálás gyorsabb, mint a beérkezés.

<u>Nagy eltérések és centrális határeloszlás tétele (CHT)</u>

1) A felajánlott videók bitrátája 2,6 – 3 Mbps között egyenletes. Az átlag 2,8 Mbps.

A csúcsidőben legfeljebb 1000 felhasználóra számítunk. Mekkora legyen a szerver kapacitása, hogy a kapacitás túllépésének valószínűsége legfeljebb 10^{-6}?

Az 1000 felhasználó egymástól függetlenül → $1000 \cdot 2{,}8$ átlagosan ~~[illegible]~~ kell.

Formálisan:

legyen X_i = {az i-edik felhasználó sávszélesség-igénye}

$X_1, X_2, \dots, X_n$ fgtlen-ek.

Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$P(S_n > C) \le 10^{-6}$ Legyen, melyhez $C = ?$, hogy teljesüljön.

Általában sokszor előfordul:

$P(a < S_n < b)$ valószínűségeket kell becsülnünk.

CHT: Ha $EX_1 = m < \infty$

$D(X_1) = \sigma < \infty$

akkor ha $X_1, X_2, \dots$ fgtlen azonos eloszlású

akkor

$$P\left(\frac{S_n - m \cdot n}{\sqrt{n} \cdot \sigma} < x\right) \longrightarrow \Phi(x)$$

ha $n \to \infty$

standard normális eloszlás eloszlásfgv-e.

1. módszer: Ha n nagy, akkor

$$P\left(\frac{S_n - m \cdot n}{\sqrt{n} \cdot \sigma} < x\right) \approx \Phi(x)$$

Jelen esetben:

$$P\left(S_{1000} > C\right) \approx 10^{-6}$$

Standardizáljuk:

$$P\left(\frac{S_{1000} - m \cdot 1000}{\sqrt{1000} \cdot \sigma} > \frac{C - m \cdot 1000}{\sqrt{1000} \cdot \sigma}\right) =$$

$m = EX_1 = 2{,}8$

$\sigma = D(X) = \frac{0{,}4}{\sqrt{12}}$ egyenletes eloszlásra

$$= 1 - P\left(\frac{S_{1000} - m \cdot 1000}{\sqrt{1000} \cdot \sigma} < \frac{C - m \cdot 1000}{\sqrt{1000} \cdot \sigma}\right) =$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{C - 2{,}8 \cdot 1000}{\sqrt{1000} \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{12}}}\right) = 10^{-6}$$

táblázatból: $\Phi(4{,}7) = 1 - 10^{-6}$

így $\frac{C - 2800}{\sqrt{1000} \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{12}}} = 4{,}7$, amiből C meghatározható:

$C = 2800 + 21{,}45$

Meg is lehet határozni, hogy mennyit tévedünk (hiszen a konvergencia helyett becslést vettünk).

Berry – Esséen tétel

Ha $X_1, X_2, \ldots$ fgtlen-ek azonos eloszlással és:

$EX_1 = m$

$D(X_1) = \sigma$

és feltesz, hogy $\exists \; \underbrace{E(X_1)^3}_{\text{harmadik momentum}} = \rho < \infty$

Ekkor a közelítés hibája:

$$\left| P\left(\frac{S_n - n \cdot m}{\sqrt{n} \cdot \sigma} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C \cdot \rho}{\sigma^3 \cdot \sqrt{n}}$$

C abszolút konstans, minden eloszlásra
ugyanaz (a tudomány mai állása szerint)

$C = 0{,}7058$

A CHT-vel legalább becsülni tudunk.

Hoeffding-egyenlőtlenség

Ez már a nagy eltérés tételkörből.

Nagy számok törvénye: $X_1, X_2, \ldots$ fgtlen. azonos eloszlású

Tfh. $m = EX_1 < \infty$

$\sigma = D(X_1) < \infty$

a nagy számok törvénye értelmében ekkor

$$\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} m$$

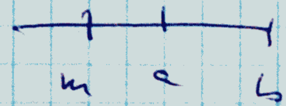
Vagyis ha veszünk egy m körüli 2ε-os intervallumot, akkor

$$P\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \in [m-\varepsilon,\, m+\varepsilon]\right) \to 1.$$

Ha az intervallum:

$$P\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} \in [a,b]\right) \to 0$$

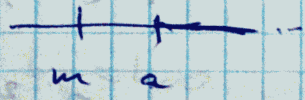
de ~~(ha)~~ $m \notin [a,b]$



A konvergencia gyorsasága:

valamilyen fgv.

$$P\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} \in [a,\infty)\right) \approx e^{-n I(a)}$$



vagyis exp. gyorsan tart a 0-hoz.

Ha $m \in [a,\infty)$, akkor $P = 1$ lesz.

A Hoeffding-egyenlőtlenség:

Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ fgtln. eloszlásúak és korlátosak (úgy, hogy $\forall k$-ra van egy alsó és egy felső korlát: $a_k \le X_k \le b_k$), valamint S_n ennek

$$\left(S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n\right)$$

Ekkor: $$P\left(S_n > E S_n + c\right) \le e^{-\frac{2c^2}{\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2}}$$

Egyelőre nem kell tudni a várható értéket.

$S_n \ge E S_n + C$ egy olyan intervallum, hogy

$$= P\left(S_n \in \left[E S_n + c, \infty\right)\right)$$

<u>példa:</u> (a videós példa óra elejéről):

$$a_k = 2{,}6$$

$$b_k = 3$$

$$n = 1000$$

$$E S_{1000} = 2800$$

$$P\left(S_{1000} > 2800 + c\right) \le \exp\left(-\frac{2c^2}{1000 \cdot 0{,}4^2}\right) = 10^{-6}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{2c^2}{1000 \cdot 0{,}4^2} = \ln 10^{-6}$$

ebből $c = 33{,}25$

így $C = 2800 + 33{,}25$ kbps

példa 2: 3 kategória (sávszélesség-fogyasztás alapján):

kezdő: átlagosan 100 Mbps
(k) nem többet, mint 200 Mbps

haladó: átlagosan 160 Mbps
(h) nem több, mint 280 Mbps

mester: átlagosan 250 Mbps
(m) nem több, mint 400 Mbps.

(csúcsidőben!)

k-ból 3500, h-ból 6500, m-ből 2000 fő van.

Mekkora legyen a kiszolgáló sávszélessége, hogy csúcsidőben legfeljebb 10^{-6} valószínűséggel lépje túl a szükséges sávszélességet?

k-ban a korlátok:

$$b_k = 200$$
$$a_k = 0$$

h-ban a korlátok:

$$b_k = 280$$
$$a_k = 0$$

m-ben a korlátok:

$$b_k = 400$$
$$a_k = 0$$

f_{12000} a aktuális sávszélesség igény

$$P(f_{12000} > C) \leq 10^{-6}$$

C a keresett kapacitás.

Használjuk a Hoeffdinget:

$$P\left(S_{12000} \geq \underbrace{ES_{12000}} + c\right) \le \exp\left(-\frac{2c^2}{\underbrace{\sum_{k=1}^{12000}(b_k-a_k)^2}}\right) = 10^{-6}$$

$$ES_{12000} = \underbrace{3500\cdot 100}_{\text{kezdők}} + \underbrace{6500\cdot 160}_{\text{haladók}} + 2000\cdot 250 = 1890000$$

$$\frac{-2c^2}{3500\cdot 200^2 + 6500\cdot 280^2 + 2000\cdot 400^2} = \ln\left(10^{-6}\right)$$

$$c \approx 81000$$

A szükséges kapacitás: $1890000 + 81000$

Nagy eltérés tétel (Cramér-tétel)

Azaz legyen $x_1, x_2, \dots$ ftlen. azonos eloszlásúak $\Rightarrow$

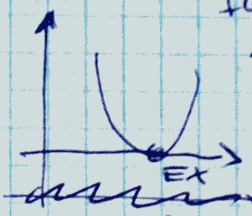
$$-\frac{1}{n}\log P\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n} \in [a,b]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_{x\in[a,b]} I(x)$$

$I(x)$: rátafgv.

Az x_1 eloszlás rátafgv.

$$-\frac{1}{n} \overset{\ln}{\log} P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]\right) \approx I(x)$$

$$P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]\right) \approx e^{-nI(x)}$$



várható értékben minimuma $(=0)$ van.

Biz.:

$$P\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} > a\right) = P(X_1+X_2+\ldots+X_n > na) =$$

turbo Markov

$$= P\left(e^{\lambda(X_1+\ldots+X_n)} > e^{\lambda n a}\right) \overset{\text{Markov-egyenlőtlenség}}{\leq} \frac{E\left(e^{\lambda(X_1+\ldots+X_n)}\right)}{e^{\lambda n a}} =$$

$\lambda > 0 \to e^{\lambda x}$ egy szig. m. ↑

vegyük egy turbo-Markov egyenlőtlenséget

Markov: $Y \geq 0$-ra $P(Y \geq y) \leq \frac{EY}{y}$

turbo Markov: ugyanaz, csak exp. fgv-re

$$= \frac{\left[E\left(e^{\lambda X_1}\right)\right]^n}{e^{\lambda n a}} = e^{-\lambda n a + n \cdot \Lambda(\lambda)}$$

ahol $\Lambda(\lambda) = \ln E(e^{\lambda x})$ momentum-generáló fgv.

Ez $\forall\, \lambda > 0$-ra teljesül.

a számláló majdnem olyan, mint a Laplace-transzformált:

$$\alpha_Y(\lambda) = E(e^{\lambda Y})$$

ha ftlen-ek összegét vesszük:

$$\alpha_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(\lambda) =$$
$$= \alpha_{X_1}(\lambda) \cdot \alpha_{X_2}(\lambda) \ldots$$

$\forall\,\lambda$-ra teljesül, így arra is, amikor a kitevő a legkisebb,

$$P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n\cdot\underbrace{\sup_{\lambda}\left(\lambda a-\Lambda(\lambda)\right)}_{I(a)}}$$