ANALÍZIS(2) | II. ZÁRTHELYI pótlása | 2004. május

Műszaki Informatika szak | B kurzus | Munkaidő: 60 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

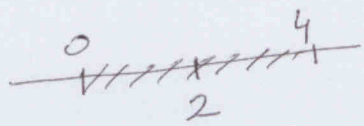
1. feladat (15 pont)

Adja meg az alábbi hatványsor bázispontját és konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n+1}} (4-2x)^n$$

$$\sum \frac{\sqrt{n}}{2\, 4^n} (-2)^n (x-2)^n \qquad x_0 = 2 \; ; \quad a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot 2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sqrt[n]{n}}^{\,\to 1}}{\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1} \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 2$$



Végpontok:

$x = 0$: $\sum\limits^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot 2^n} (-2)^n = \sum\limits^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{2}}_{\to\infty\ (\not\to 0)}$ div.

$x = 4$: $\sum\limits^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot 2^n} 2^n = \sum (-1)^n \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{2}}_{\not\to 0}$ div

(Szüks. feltétel nem teljesül)

K. T: $(0, 4)$

2. feladat (15 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott x_0 pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg a sor konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{2x}{5 + 10x^2}$, $\quad x_0 = 0$

b) $g(x) = \dfrac{1}{6 + x}$, $\quad x_0 = -3$

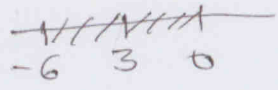
$$f(x) = 2x \cdot \frac{1}{5} \frac{1}{1 - (-2x^2)} = \frac{2}{5} x \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{5} x^{2n+1}$$

K.T. : $|-2x^2| = 2|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$g(x)=\frac{1}{6+x}=\frac{1}{3+(x+3)}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{-(x+3)}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(x+3)}{3}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{3^{n+1}}\,(x+3)^n$$

$$\text{KT: } \left|\frac{-(x+3)}{3}\right|=\frac{|x+3|}{3}<1 \Rightarrow |x+3|<3$$



3. feladat (20 pont)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{27+3\,x^2}}$$

Adja meg az f függvény $x_0=0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n$ jelölés mellett $a_6=?$ (Elemi műveletekkel írja le!)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{27}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{9}}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x^2}{9}\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}\left(\frac{x^2}{9}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}\frac{1}{3\cdot 9^n}\;x^{2n}$$

$$\text{K.T: } \left|\frac{x^2}{3}\right|<1 \Rightarrow |x|^2<3 \Rightarrow |x|<\sqrt{3} \Rightarrow R=\sqrt{3}$$

$$2n=6 \Rightarrow n=3 \quad : \quad a_6=\binom{-1/3}{3}\frac{1}{3\cdot 9^3}=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\;\frac{1}{3\cdot 9^3}$$

4. feladat (10 pont)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-3y^2}{x^2+5y^2}=?$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2x^2-3y^2}{x^2+5y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-3y^2}{x^2+5y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-3y^2}{5y^2}=-\frac{3}{5}\neq 2 \Rightarrow \nexists \text{ a határérték}$$

Vagy:

$$\lim_{x\to 0}f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-3m^2x^2}{x^2+5m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\,\frac{2-3m^2}{1+5m^2}=\frac{2-3m^2}{1+5m^2}$$

függ m-től $\Rightarrow \nexists$ a határérték.

5. feladat (30 pont)

$$f(x,y) = (3y - x)^2 - 6y^2 + 8x$$

a) $f'_x(x,y) = ?$; $f'_y(x,y) = ?$

b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)

c) Írja fel a függvény $P_0(2,1)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

d) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(2,1)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -5\,\underline{i}$

e) Hol lehet f-nek lokális szélsőértéke?
Van-e lokális szélsőértéke? Ha igen, milyen jellegű?

a) $f'_x = 2(3y-x)(-1) + 8 = -6y + 2x + 8$ $\cancel{\left.\begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}}$

$f'_y = 2(3y-x)3 - 12y = 6y - 6x$

b.) f'_x, f'_y mindenütt $\exists$ és folyt. $\Rightarrow$ f mindenütt diffható

c.) $f'_x(2,1) = 6$, $f'_y(2,1) = -6$; $f(2,1) = 11$

$f'_x(2,1)(x-2) + f'_y(2,1)(y-1) - (z - f(2,1)) = 0$: az érintősík

$6(x-2) - 6(y-1) - (z-11) = 0$

d.) $\underline{e} = -\underline{i}$ és grad$f$ létezése miatt: $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_P = \mathrm{grad}f(P)\cdot\underline{e}$

$\mathrm{grad}f|_{(2,1)} = 6\underline{i} - 6\underline{j}$

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(2,1)} = (6\underline{i} - 6\underline{j})(-\underline{i}) = -6$

e.) $\left.\begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}$ pontban lehet lok. szé.

$f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = f''_{yx} = -6$, $f''_{yy} = 6$ $D(2,1) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$ nincs lok. szé.

6. feladat (10 pont)

$f(x,y) = h(x^2 y + 3x)$, $h \in C^2_{\mathbb{R}}$, $f'_x = ?$, $f''_{xy} = ?$

$f'_x = h'(x^2y + 3x)\cdot(2xy + 3)$

$f''_{xy} = h''(x^2y + 3x)\cdot x^2\cdot(2xy + 3) + h'(x^2y + 3x)\cdot 2x$